LÊ QUANG ÁNH
GV Chuyên Toán – PTTH Thạnh Mỹ Tây – TP Hồ Chí Minh

GIÚP HỌC TỐT TOÁN CẤP III

CẤP SỐ - DÃY SỐ

(DÙNG CHO HS CHUYÊN CHỌN CẤP 3)

- ***Kiến thức cơ bản***
- ***Bài tập có lời giải***
- ***Bài tập đề nghị***

NHÀ XUẤT BẢN ĐỒNG NAI

Lời nói đầu

Chúng tôi xin giới thiệu với các bạn học sinh Cấp 3, đặc biệt là học sinh các lớp chuyên chọn, tập tài liệu về "DÃY SỐ – CẤP SỐ" nhằm mục đích giúp các em có thêm tài liệu học tập và nâng cao trình độ của mình trong chuyên đề này.

Mỗi một vấn đề đều được bắt đầu bằng phần tóm tắt lý thuyết nếu phần này đã học và phần giới thiệu và triển khai một số kiến thức quan trọng nếu phần này chưa học hoặc ít được đề cập trong các sách giáo khoa thông dụng ở Cấp 3. Sau đó là phần bài tập có lời giải và bài tập đề nghị. Đó là những bài tập minh họa các kiến thức trước đó hoặc những bài tập có liên quan đến các kiến thức đó nhưng cao hơn, trích trong các đề thi Tú Tài Pháp hoặc các kỳ thi học sinh giỏi thành phố HCM, Toàn quốc và Quốc tế. Đối với bài tập đề nghị tác giả có hướng dẫn qua, nhưng học sinh hoàn toàn có thể nghĩ đến phương pháp khác riêng của mình.

Tác giả rất mong muốn kinh nghiệm và nhiệt tình của mình đem lại lợi ích cho các học sinh ham thích toán.

Trong lần xuất bản đầu tiên này, có thể có một số sai sót ngoài ý muốn, rất mong bạn đọc góp ý – xin chân thành cám ơn.

TP Hồ Chí Minh, mùa hè 94

TÁC GIẢ

MỤC LỤC

§1 CẤP SỐ CỘNG

A TÓM TẮT GIÁO KHOA :

1. Định nghĩa : *Ta gọi cấp số cộng công sai $d \neq 0$ tất cả dãy số (u_n) thỏa điều kiện :*

$$\begin{cases} u_1 \text{ cho sẵn trong } R \\ u_n = u_{n+1} + d \qquad (n \geq 2) \end{cases}$$

2. Các công thức quan trọng :

1 $\quad u_n = u_1 + (n-1) \cdot d \qquad (n \geq 2)$

2 $\quad u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \qquad (n \geq 2)$

Công thức này là đặc trưng của cấp số cộng

$$3 \quad \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1) \cdot d]}{2}$$

$$4 \quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI :

Bài 1 : Chứng minh a, b, c là ba số dương tạo thành một cấp số cộng nếu và chỉ nếu ba số :

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

tạo thành một cấp số cộng.

Giải

Trước hết ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{c-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$$

$$= \frac{b-a}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

Từ hai kết quả đó ta có :

$$b - a = c - b \iff \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

Hay là :

$$b = \frac{a+b}{c} \iff \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$

Đó chính là điều phải chứng minh

Bài 2

Trong một cấp số cộng ta đặt : $S_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$

1/ Cho biết : $S_m = n$ và $S_n = m$ (với $m \neq n$) . Hãy tính S_{m+n}.

2/ Cho biết : $S_m = S_n$ (với $m \neq n$) . Hãy tính S_{m+n}

Giải

1/ $S_m = n$ và $S_n = m$. Tính S_{m+n}

$$S_m = n \iff \frac{m[2u_1 + (m-1)\,d]}{2} = n$$

$$\iff 2mu_1 + (m^2 - m)\,.\,d = 2n \quad (1)$$

Tương tự từ $S_n = m$ ta có : $2nu_1 + (n^2 - n)\,.\,d = 2m$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$2u_1\,.\,(m-n) + [(m^2 - n^2) - (m-n)]\,.\,d = -2(m-n)$$

Do $m \neq n$ nên :

$$2u_1 + (m+n-1)\,.\,d = -2 \iff (m+n-1)\,.\,d = -2 - 2u_1$$

Mặt khác ta có :

$$S_{m+n} = \frac{(m+n)[2u_1 + (m+n-1).d]}{2}$$

Thay kết quả trên vào biểu thức của S_{m+n} ta được :

$$S_{m+n} = \frac{(m+n)(2u_1 - 2 - 2u_1)}{2} = -(m+n)$$

2/ $\underline{S_m = S_n \text{ . Tính } S_{m+n}}$

$S_m = S_n \iff m\,[2u_1 + (m-1).d] = n\,[2u_1 + (n-1).d]$

$\iff 2u_1\,(m-n) + [(m^2 - n^2) - (m-n)]\,d = 0$

$\iff 2u_1 + (m+n-1)\,d = 0$ (do $m \neq n$)

Thay vào biểu thức của S_{m+n} ta thấy ngay : $S_{m+n} = 0$

Bài 3

Chứng minh $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ không thể là ba số hạng của bất kỳ một cấp số cộng nào.

Giải

Giả sử $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ là ba số hàng thứ $l + 1$, $m + 1$ và $n + 1$ của cùng một cấp số cộng. Thế thì :

$$\sqrt{2} = u_1 + ld \text{ ; } \sqrt{3} = u_1 + md \text{ ; } \sqrt{5} = u_1 + nd$$

Từ đó : $$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(m-l).d}{(n-m)d} = \frac{m-l}{n-m}$$

Nhưng mà $l, m, n \in N$ nên $\frac{m-l}{n-m} \in Q$.Đặt : $\frac{m-l}{n-m} = r$

ta chứng minh : $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \in Q$ dẫn tới điều vô lý

Thật vậy

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = r \Rightarrow \frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{15}-3} = r \Rightarrow r.\sqrt{15} + \sqrt{6} = 3\,(r+1)$$

r là số hữu tỷ nên $3\,(r+1) = s$ là số hữu tỷ ;

Ta có : $r\sqrt{15} + \sqrt{6} = s$ (i)

Từ (i) ta suy ra :$(r\sqrt{15} + \sqrt{6}) = (r\sqrt{15} - \sqrt{6}) = s(r\sqrt{15} - \sqrt{6})$

nên : $$r\sqrt{15} - \sqrt{6} = \frac{15r^2 - 6}{s} = s' \text{ (ii)}.$$

s' cũng là số hữu tỷ vì r và s đều là số hữu tỷ .

Từ (i) và (ii) ta có : $2r\sqrt{15} = s + s' \Rightarrow \sqrt{15} = \frac{s + s'}{2r}$

Vậy $\sqrt{15}$ là số hữu tỷ : vô lý !

Tóm lại $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ không thể là ba số hạng trong cùng một cấp số cộng được.

Bài 4

1/ Cho cấp số cộng $a_1, a_2, .., a_n, .$ có tất cả các số hạng đều khác 0.

Chứng minh : $$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + ... + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

2/ Giả sử có 1 dãy số (a_n) với các số hạng đều khác 0, thỏa điều kiện:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + ... + \frac{1}{a_{k-1} a_k} = \frac{k-1}{a_1 a_k} \text{ với mọi } k \geq 3$$

Hãy chứng tỏ rằng dãy số (a_n) là một cấp số cộng.

Giải

1/ Ta để ý là : $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$

nên ta có :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2} &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) \\ \frac{1}{a_2 a_3} &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{a_{n-1} a_n} &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) \end{aligned}\right\} \text{ có } (n-1) \text{ hàng}$$

Cộng (n − 1) đẳng thức trên ta được :

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right)$$

$$= \frac{a_n - a_1}{d \,.\, a_1 a_n} = \frac{a_1 + (n-1)d - a_1}{d a_1 a_n}$$

$$= \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

2/ Từ giả thiết với k lần lượt cho bằng 3, 4, ... , n ta được :

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{a_1 a_3} \qquad (3)$$

$$\frac{2}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_3 . a_4} = \frac{3}{a_1 a_4} \qquad (4)$$

....

$$\frac{n-2}{a_1 a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n} \qquad (n)$$

Biến đổi (3) ta được : (3) $\Rightarrow a_3 + a_1 = 2a_2$

$\Rightarrow a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = d$

Như vậy a_1, a_2, a_3 là 1 cấp số cộng công sai d.

Biến đổi (4) : (4) $\Rightarrow 2a_4 + a_1 = 3a_3$

$\Rightarrow 2a_4 = -a_1 + 3\,(a_1 + 2d)$

$\Rightarrow a_4 = a_1 + 3d$

Giả sử ta chứng minh được : $a_{n-1} = a_1 + (n-2)\,.\,d$

Từ đẳng thức (n) ta suy ra : $(n-2)\,a_n + a_1 = (n-1)\,.\,a_{n-1}$

Do đó : $(n-2)\,a_n = -a_1 + (n-1)\,.\,[a_1 + (n-2)\,d]$

$= (n-2)\,a_1 + (n-1)(n-2)\,.\,d$

Suy ra : $a_n = a_1 + (n-1)\,.\,d$

Vậy dãy số (a_n) là một cấp số cộng

Bài 5 : Cho cấp số cộng $a_1, a_2, \ldots, a_n$

1/ Chứng minh : $a_1 a_n \le a_2 a_{n-1} \le a_3 a_{n-2} \le \ldots \le a_k a_{n-k+1} \le \ldots$ với $1 \le k \le \frac{n+1}{2}$

2/ Giả sử tất cả các số hạng của cấp số cộng đều không âm, hãy Chứng minh :

$$\sqrt{a_1 a_n} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Giải

1/ . Ta chứng minh :

$a_{k-1} a_{n-k+2} \le a_k a_{n-k+1}$ với $2 \le k \le \frac{n+1}{2}$ Thật vậy :

$$a_{k-1} a_{n-k+2} = [a_1 + (k-2).d].[a_1 + (n-k+1).d]$$
$$= a_1^2 + (n-1)a_1 d + (k-2)(n-k+1).d^2 \quad (1)$$
$$a_k . a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)d].[a_1 + (n-k).d]$$
$$= a_1^2 + (n-1)a_1 d + (k-1).(n-k).d^2 \quad (2)$$

Ta so sánh hai kết quả ở (1) và (2) bằng cách lấy hiệu :

$$a_k a_{n-k+1} - a_{k-1} a_{n-k+2} = [(k-1).(n-k) - (k-2)(n-k+1)].d^2$$
$$= (n-2k+2).d^2$$

Do $k \le \frac{n+1}{2}$ nên : $n - 2k + 1 \ge 0 \Rightarrow n - 2k + 2 > 0$

Vậy : $a_{k-1} a_{n-k+2} \le a_k a_{n-k+1}$ (với $2 \le k \le \frac{n+1}{2}$)

Ta cho k lấy các giá trị trên ta thu được bất đẳng thức ở câu 1/

2/ • Theo câu 1/ ta có :

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^2 = (a_1 a_n).(a_2 a_{n-1}) \ldots (a_n a_1) \ge (a_1 \cdot a_n)^n$$

Lấy căn bậc 2n hai vế ta được : $\sqrt{a_1 a_n} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (i)

• Do $a \ge 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) nên bất đẳng thức Côsi cho :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$= \frac{1}{2n}[(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_n + a_1)]$$

$$= \frac{1}{2n} . n(a_1 + a_n) = \frac{a_1 + a_n}{2} \text{ (ii)}$$

(i) và (ii) cho ta bất đẳng thức kép cần chứng minh.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1 Cho cấp số cộng $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ với tất cả các số hạng đều dương và $d \neq 0$. Chứng minh :

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

Hướng dẫn : $\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d}$

2/ a, b, c lần lượt là ba số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng. Chứng minh : $a.(n - p) + b.(p - m) + c.(m - n) = 0$

3/ Một cấp số cộng có tính chất với mọi số nguyên dương m và n khác nhau, các tổng S_m và S_n thỏa hệ thức : $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$

Chứng minh rằng : $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$

4/ Hãy xác định cấp số cộng biết rằng $\frac{S_n}{S_{2n}}$ không phụ thuộc vào n.

Đáp số : $d = 2u_1$

5/ 1/ Định một cấp số cộng biết $S_n = 3n^2 + 4n$, với mọi số tự nhiên n.

2/ Một số các số hạng của cấp số này là những số chính phương. Hãy cho biểu thức tổng quát của chúng. Kiểm tra thử lại.

Hướng dẫn

2/ $u_n = 6n + 1 = (2k + 1)^2 \Leftrightarrow 3n = 2k.(k + 1)$

k và k + 1 nguyên tố cùng nhau, ...

§2 CẤP SỐ NHÂN

A TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa : *Ta gọi cấp số nhân công bội q tất cả các dãy số(u_n)* thỏa điều kiện :

$$\begin{cases} u_1 \text{ cho sẵn trong R} \\ u_n = q \, . \, u_{n-1} \quad (n > 2) \end{cases}$$

Nếu q = 0 thì $u_2 = ... = u_n = ... = 0$

Nếu q = 1 thì tất cả các số hạng bằng nhau và bằng u_1

Nếu q = −1 thì $u_1 = u_3 = u_5 = ...$; $u_2 = u_4 = ... = -u_1$

Sau này ta loại ba trường hợp tầm thường này

2. Các công thức :

1 $\quad u_n = u_1 \, . \, q^{n-1}$ $(n \geq 2)$

2 $\quad u_n^2 = u_{n-1} \, . \, u_{n+1}$ $(n \geq 2)$

3 $\quad u_1 u_n = u_2 u_{n-1} = ...$

4 $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

5 $\quad$ *Với* $|q| < 1$ *thì* $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \dfrac{u_1}{1-q}$

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Bài 1 : Chứng minh rằng để ba số khác không a, b, c là ba số hạng của cùng một cấp số nhân, điều kiện cần và đủ là tồn tại ba số nguyên khác không p, q, r sao cho :

$$\begin{cases} p + q + r = 0 \\ a^p . b^q . c^r = 1 \end{cases}$$

Giải

* **Thuận :** Giả sử a, b, c là ba số hạng thứ k + 1, l + 1 và m + 1 của cùng một cấp số nhân số hạng đầu u_1, công bội ρ .

Ta có : $a = u_1 . \rho^k ; b = u_1 . \rho^l ; c = u_1 . \rho^m$

Từ các đẳng thức ấy ta suy ra :

$$\frac{a}{b} = \rho^{k-l} \Rightarrow (\frac{a}{b})^{l-m} = \rho^{(k-l)(l-m)}$$

$$\frac{b}{c} = \rho^{l-m} \Rightarrow (\frac{b}{c})^{k-l} = \rho^{(l-m)(k-l)}$$

Do đó : $(\frac{a}{b})^{l-m} = (\frac{b}{c})^{k-l} \Rightarrow a^{l-m} . b^{-l+m-k+l} . c^{k-l} = 1$

$$\Rightarrow a^{l-m} . b^{m-k} . c^{k-l} = 1$$

Với $p = l - m$; $q = m - k$ và $r = k - l$ thì hiển nhiên là p, q, r là ba số nguyên khác không và : $p + q + r = 0$

* **Đảo :** a, b, c ≠ 0 thỏa hai điều kiện :

$$\begin{cases} p + q + r = 0 \ (1) \\ a^p . b^q . c^r = 1 \ (2) \end{cases}$$

Do $p + q + r = 0$ nên tồn tại ít nhất là một số dương và 1 số âm. Giả sử đó là $r > 0$ và $q < 0$. Từ giả thiết (2) ta viết :

$$a^p . b^{-p-r} . c^r = 1 \Rightarrow (\frac{a}{b})^p = (\frac{c}{b})^r \ (*)$$

Đặt : $\rho^r = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\rho^r$ (3)

Từ (*) ta có : $(\frac{c}{b})^r = \rho^{rp} \Rightarrow c = b \ \rho^p \quad \Rightarrow c = a . \rho^{r+p}$ (4)

(3) và (4) cho thấy a, b, c là ba số hạng của cấp số nhân a là số hạng đầu, b là số hạng thứ $r + 1$ còn c là số hạng thứ $r + p + 1$.

Bài 2

Cho tổng số : $A = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{11...1}_{n \text{ số } 1}$

Chứng minh rằng : $A = \dfrac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$

Giải

Ta có : $9 \cdot A = 9 + 99 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ số } 9}$

$= (10 - 1) + (100 - 1) + \ldots + (10^n - 1)$

$= (10^1 + 10^2 + \ldots + 10^n) - n$

$= \dfrac{10.(1-10^n)}{1-10} - n = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$

Vậy : $A = \dfrac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$

Bài 3 : Cho cấp số nhân có số hạng đầu $a_1 \neq 0$ và $q \neq 0$ và $q \neq \pm 1$. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên. Chứng minh :

$$S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$$

Giải

$S_n . (S_{3n} - S_{2n}) = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} \cdot \left[\dfrac{a_1(1-q^{3n})}{1-q} - \dfrac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}\right]$

$= \dfrac{a_1^2}{(1-q)^2} \cdot (1 - q^n)(q^{2n} - q^{3n})$

$= \dfrac{a_1^2}{(1-q)^2} \cdot q^{2n} \cdot (1 - q^n)^2$

$= \left[\dfrac{a_1.q^n.(1-q^n)}{1-q}\right]^2 \quad (1)$

Mặt khác :

$(S_{2n} - S_n)^2 = \left[\dfrac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} - \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}\right]^2$

$$= \frac{a_1^2}{(1-q)^2} . [(1 - q^{2n}) - (1 - q^n)]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{(1-q)^2} . [q^n . (1 - q^n)]^2$$

$$= [\frac{a_1 . q^n . (1-q^n)}{1-q}]^2 \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có : $S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

Bài 4

Cho Δ ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c. Với điều kiện nào của công bội q thì a, b, c tạo thành một cấp số nhân ?

Giải

Giả sử a, b, c có công bội q, thế thì q > 0 do a, b, c > 0

Ta có : $\begin{cases} b = aq \\ c = aq^2 \end{cases}$

Các điều kiện : $\begin{cases} a + b > c \\ a + c > b \\ b + c > a \end{cases}$

được diễn tả thành :

$$\begin{cases} 1 + q > q^2 \\ 1 + q^2 > q \\ q + q^2 > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 & (1) \\ q^2 - q + 1 > 0 & (2) \\ q^2 + q - 1 > 0 & (3) \end{cases}$$

Điều kiện (2) hiển nhiên đúng. Còn (1) thì tương đương với :

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

và (2) thì tương đương với : $q < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hay $q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Do $q > 0$ nên điều kiện của q rút lại là : $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Bài 5

1/ Chứng minh rằng nếu x, y, z (ba số thực khác 0) theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân thì ta có :

$$(x^n + y^n + z^n).(x^n - y^n + z^n) = x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} \; ; \forall n \in Z$$

Trong trường hợp nào thì phần đảo đúng.

2/ Áp dụng : Xác định ba số thực khác 0 biết rằng chúng tạo thành một cấp số nhân có tổng nghịch đảo của chúng bằng 26 và tổng bình phương các nghịch đảo của chúng bằng 364.

Giải

1/. Ta có : $(x^n + y^n + z^n).(x^n - y^n + z^n) = (x^n + z^n)^2 - y^{2n}$
$= x^{2n} + z^{2n} + 2x^n z^n - y^{2n}$

Do đó :

$$D = (x^n + y^n + z^n).(x^n - y^n + z^n) - (x^{2n} + y^{2n} + z^{2n})$$
$$= 2(x^n z^n - y^{2n})$$

Do ∵ x, y, z nên : $y^2 = xz \Rightarrow y^{2n} = x^n . z^n$

Vậy $D = 0$ nên : $(x^n + y^n + z^n)(x^n - y^n + z^n) = x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}$ (1)

Đảo lại, nếu có (1) tức là $D = 0$ nên : $x^n z^n = y^{2n}$

Có hai trường hợp phải xem xét :

1/ n lẻ : Hệ thức trên dẫn tới $xz = y^2$

Do đó x, y, z theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân : Đảo đúng.

2/ n chẵn : Hệ thức trên cho :

- Hoặc là $y^2 = xz$, lúc ấy x, y, z theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân : Đảo đúng.
- Hoặc là $y^2 = -xz$, lúc ấy đảo sai vì x và z trái dấu nên x, y, z không thể là một cấp số nhân được.

Tóm lại : Phần đảo chỉ đúng khi n lẻ hoặc khi n chẵn và x, y cùng dấu.

2/ Cho n = −1 vào (1) ta được .

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

Với giả thiết ta suy ra :

$$26.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=364 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=14$$

Vậy ta có hệ : $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=26\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=14\end{cases}$

Suy ra : $\frac{2}{y}=12 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{6}$

Sau đó ta có : $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=14+6=20$

và : $xz=\frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{1}{x}.\frac{1}{z}=36$

Như vậy $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{z}$ là nghiệm của phương trình :

$$u^2-20u+36=0 \Leftrightarrow u=2\ ;\ u=18$$

Kết quả : $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x}=18 \Leftrightarrow x=\frac{1}{18}\end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{z}=18 \Leftrightarrow z=\frac{1}{18}\\ \frac{1}{z}=2 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Kết luận : Hai đáp số :

1) $\because \frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{18}\ (q=\frac{1}{3})$

2) $\because \frac{1}{18},\frac{1}{6},\frac{1}{2}\ (q=3)$

C BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tính tổng : $7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77\dots7}_{n \text{ số } 7}$

Đáp số : $\dfrac{7(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}$

2. Tính tổng : $S_n = 1 + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^4} + \dfrac{7}{2^6} + \dots + \dfrac{2n+1}{2^{2n}}$

Hướng dẫn và đáp số : Tính $S_n - \dfrac{1}{4} S_n$

Đáp số : $S_n = \dfrac{20}{9} - \dfrac{6n+11}{9.2^{2n}}$

3. Một cấp số cộng và một cấp số nhân có cùng số hạng thứ m +1, thứ n + 1 và thứ p + 1 là ba số dương a, b, c.

Chứng minh : $a^{b-c} . b^{c-a} . c^{a-b} = 1$

Hướng dẫn : Dùng các công thức của cấp số cộng và cấp số nhân:

$a = u_1 + md$ và $a = v_1 . q^n$, ... vân vân, ...

4. Chứng minh rằng 2, 3, 5 không thể là những số hạng của cùng một cấp số nhân được.

Hướng dẫn : Nếu chúng là các số hạng thứ k + 1, l + 1 và m + 1 của cùng một cấp số nhân số hạng đầu a, công bội q, thì ta chứng minh được :

$$\frac{2}{3} = q^{k-1} ; \frac{5}{3} = q^{m-1}$$

Từ đó : $2^m . 3^k . 5^l = 2^l . 3^m . 5^k$ (vô lý)

(Một số nguyên dương chỉ có thể phân tích thành thừa số nguyên tố một cách duy nhất).

5. Cho một cấp số cộng : $\div\, a_1 , a_2 , \dots , a_n , \dots$

và một cấp số nhân : $b_1 , b_2 , \dots , b_n , \dots$

1/ Nếu $a_i > 0$; $\forall$ i và $a_1 = b_1 \neq a_2 = b_2$ thì hãy Chứng minh rằng:
$a_n < b_n$; $\forall n > 2$

2/ Nếu $a_i > 0$; $\forall$ i và $a_1 = b_1 \neq a_n = b_n$ thì hãy Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} a_k > b_k \text{ với } 1 < k < n \\ a_k < b_k \text{ với } k > n \end{cases}$$

Hướng dẫn :

1/ Chứng tỏ $d > 0$ và $q > 1$.

Sau đó suy ra : $n - 1 < 1 + q + q^2 + ... + q^{n-2}$: hiển nhiên

2/ Cũng như trên : $d > 0$ và $q > 1$.

Ta sẽ có : $$\frac{q^{n-1} - 1}{n - 1} > \frac{q^{k-1} - 1}{k-1}$$

- Khi $n > k$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng
- Khi $n < k$ thì thay đổi vai trò của n và k.

6. a, b là hai số cho sẵn. Ta lập dãy số (a_n) như sau :

$$\begin{cases} a_1 = a \; ; \; a_2 = b \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \; (n \geq 3) \end{cases}$$

1/ Chứng minh rằng dãy (u_n) định bởi $u_n = a_n - a_{n-1}$ là một cấp số nhân.

2/ Tính u_n theo a và b rồi tìm $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$

Đáp số : $$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{a + 2b}{3}$$

7. Có cấp số nhân có công bội q với $|q| < 1$. Tính các tổng sau đây:

1/ $T_1 = 1 + 2q + 3q^2 + ... + nq^{n-1} + ...$
2/ $T_2 = 1 + 4q + 9q^2 + ... + n^2q^{n-1} + ...$
3/ $T_3 = 1 + 8q + 27q^2 + ... + n^3q^{n-1} + ...$

Đáp số : 1/ $T_1 = \dfrac{1}{(1-q)^2}$ 2/ $T_2 = \dfrac{1 + q}{(1 - q)^3}$ 3/ $T_3 = \dfrac{q^2 + 4q + 1}{(1 - q)^4}$

§3 DÃY SỐ

A TÓM TẮT GIÁO KHOA

I ĐẠI CƯƠNG VỀ DÃY SỐ :

1. Định nghĩa :

Một dãy số là một ánh xạ từ tập N đến tập hợp R.

$$n \longmapsto f(n) = u_n$$

Ta ghi : Dãy số $(u_n)_{n \in N}$ hoặc vắn tắt hơn : dãy (u_n)

2. Dãy số tăng – dãy số giảm :

Dãy (u_n) tăng kể từ n_o : $n \geq n_o \Rightarrow u_{n+1} > u_n$

Dãy (u_n) giảm kể từ n_o : $n \geq n_o \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

CHÚ Ý :

1/ Dãy tăng, dãy giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

2/ Dãy có thể tăng hoặc giảm kể từ n_o*, nhưng dãy cũng có thể tăng hoặc giảm kể từ đầu* ($n_o = 0$)*. Sau này ta gọi chung là dãy tăng hoặc dãy giảm (mà không nói kể từ* n_o*).*

3. Dãy số bị chặn •

Dãy (u_n) bị chặn trên (bị chặn bên phải) :

$$\exists A \in R : u_n \leq A \ ; \ \forall n \in N$$

Dãy (u_n) bị chặn dưới (bị chặn bên trái) :

$$\exists B \in R : u_n \geq B \ ; \forall n \in N$$

Dãy (u_n) bị chặn khi nó bị chặn trên và bị chặn dưới.

CHÚ Ý :

1/ Các số thực A và B nói trên không duy nhất. Thật vậy A có thể thay bởi $A' > A$*, còn B thì có thể thay bởi* $B' < B$*.*

2/ Hiển nhiên (u_n) bị chặn khi và chỉ khi $(|u_n|)$ bị chặn trên, tức là :

• (u_n) bị chặn $\Leftrightarrow (\exists A > 0 : |u_n| \leq A \ ; \ \forall n \in N)$

4. Các phép tính về dãy số :

Từ hai dãy (u_n) và (v_n) ta định nghĩa các dãy mới :

Dãy $(u_n + v_n)$: $w_n = u_n + v_n$; $\forall n \in N$

Dãy $(u_n . v_n)$: $w_n = u_n . v_n$; $\forall n \in N$

Dãy $(k . u_n)$: $w_n = k . u_n$; $\forall n \in N$ (với k là một số thực cho sẵn)

Dãy $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *(với* $v_n \neq 0$ kể từ n_o) : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$; $\forall n \geq n_o$.

5. Dãy con

Cho dãy (u_n). Với mỗi số tự nhiên n ta cho tương ứng với một số tự nhiên p_n sao cho :

$$p_1 < p_2 < p_3 < ... < p_n < ...$$

Ta nói dãy (v_n) định bởi : $v_n = u_{p_n}$ là dãy con của (u_n)

Hiển nhiên là nếu dãy (u_n) bị chặn thì dãy con của nó cũng bị chặn.

II GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ :

1. Định nghĩa :

Dãy (u_n) *có giới hạn là* l *(hay : hội tụ đến* l*) nếu tồn tại số thực* l *sao cho với mọi số* $\varepsilon > 0$ *ta tìm được một số tự nhiên* n_o *để mỗi khi có* $n \geq n_o$ *thì có* $|u_n - l| < \varepsilon$

Ký hiệu : $(u_n) \longrightarrow l$ khi $n \to +\infty$

Hoặc là : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$

Do định nghĩa ta có :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = l \iff (\forall \varepsilon > 0;\ \exists n_o \in N;\ n \geq n_o \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

2. Hai thí dụ quan trọng :

1 Chứng minh rằng : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Giải.

Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Ta có : $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Chọn n_o là số nguyên dương lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$; ta có :

$$n \geq n_o \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Vậy : $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

CHÚ Ý :

1/ Hiển nhiên n_o không phải duy nhất ; nó tùy thuộc vào ε

2/ Ta cũng chứng minh được : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ ($\alpha > 0$)

2. Chứng minh rằng : $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ (với $|q| < 1$)

Giải

Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý.

Ta có : $|q^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |q|^n < \varepsilon$

$\Leftrightarrow n. \lg|q| < \lg \varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \frac{lg\varepsilon}{lg|q|}$ (chú ý : $\lg|q| < 0$)

Chọn n_o là số nguyên dương lớn hơn $\frac{lg\varepsilon}{lg|q|}$; ta có :

$$n \geq n_o \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon$$

Vậy : $$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Hai kết quả trong các thí dụ trên sau này sẽ được dùng trong các phép tính về giới hạn mà không cần chứng minh lại.

3. Tính duy nhất của l

Định lý 1 : *Nếu dãy* (u_n) có giới hạn là l thì l là duy nhất.

Chứng minh

Giả sử rằng (u_n) có giới hạn là l và $l' \neq l$

Đặt : $\varepsilon = \dfrac{|l - l'|}{2} \iff |l - l'| = 2\varepsilon$ (i)

Do định nghĩa ta có : $\exists n_1 \in N ; n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

$\exists n_2 \in N : n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon$

Do đó :

$n \geq \max(n_1, n_2) \Rightarrow |l - l'| < |u_n - l| + |u_n - l'| < 2\varepsilon$ (ii)

(i) và (ii) mâu thuẫn nhau. Vậy $l = l'$

4. Điều kiện để dãy hội tụ

Định lý 2 : (cần) *Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.*

Chứng minh

Cho dãy (u_n) hội tụ đến l :

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in N : n \geq n_o \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$

Đặt : $A = \max\{u_0, u_1, \ldots, l + \varepsilon\}$

$B = \min\{u_0, u_1, \ldots, l - \varepsilon\}$

Như thế hiển nhiên là : $A \leq u_n \leq B$; $\forall n \in N$

Tức là dãy (u_n) bị chặn

Định lý 3 (Đủ) *Mọi dãy tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) thì hội tụ*

Chứng minh

- Ta **Chứng minh** định lí trong trường hợp dãy tăng và bị chặn trên.

Xét tập hợp $\{u_o, u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$. Đây là một tập hợp vô hạn bị chặn trên nên tồn tại một chặn trên nhỏ nhất l của tập hợp đó.

Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Hiển nhiên $l - \varepsilon < l$ nên $l - \varepsilon$ không phải là một chặn trên của tập hợp ấy, suy ra :

$\exists n_o \in N : u_{n_o} > l - \varepsilon$

Mặt khác, (u_n) là dãy tăng nên : $n \geq n_o \Rightarrow u_n > u_{n_o}$

$\Rightarrow l - \varepsilon < u_{n_o} < u_n \leq l < l + \varepsilon$

$\Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

- Đối với dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới thì ta xét dãy $(-u_n)$. Dãy này là dãy tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Từ đó (u_n) hội tụ.

CHÚ Ý : Trong chứng minh định lý 3 ta đã xử dụng mệnh đề sau đây (mà ta công nhận) :

Mọi tập hợp con của R bị chặn trên (dưới) đều có một chận trên (dưới) nhỏ nhất (lớn nhất).

5. Các định lý về giới hạn

Cho hai dãy (u_n) và (v_n) hội tụ lần lượt đến l và l', α và β là hai số thực. Thế thì :

(i) *Dãy* $(\alpha u_n + \beta v_n)$ *hội tụ đến* $\alpha l + \beta l'$

(ii) *Dãy* $(u_n v_n)$ hội tụ đến $l.l'$

(iii) *Nếu* $v_n \neq 0$ (kể từ n_o) và nếu $l' \neq 0$ thì dãy $\dfrac{u_n}{v_n}$ hội tụ đến $\dfrac{l}{l'}$.

(các chứng minh xem như bài tập)

6. Quan hệ thứ tự và sự hội tụ

Định lý 4 : *Cho hai dãy* (u_n) *và* (v_n) *lần lượt hội tụ tới* l *và* l'. *Nếu* $u_n \leqslant v_n$ *(kể từ một thứ hạng nào đó) thì* $l \leq l'$.

Chứng minh

Kể từ n_1 ta có : $u_n \leq v_n$

Giả sử $l' < l$. Đặt : $\varepsilon = \dfrac{l - l'}{2} > 0$

Tồn tại một số tự nhiên n_2 sao cho :

$$n \geq n_2 \Rightarrow \begin{cases} |u_n - l| < \dfrac{l-l'}{2} \\ |v_n - l'| < \dfrac{l+l'}{2} \end{cases}$$

Nếu $n_o = \max(n_1, n_2)$ thì :

$$n \geq no \Rightarrow \begin{cases} l - u_n < \dfrac{l-l'}{2} \\ v_n - l' < \dfrac{l-l'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n > \dfrac{l+l'}{2} \\ v_n < \dfrac{l+l'}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad u_n > v_n$: mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $l \leq l'$

Định lý 5 : *Cho hai dãy* (u_n) và (v_n) lần lượt hội tụ tới l và l'. Nếu $l < l'$ thế thì kể từ một thứ hạng nào đó $u_n < v_n$.

Chứng minh

Đặt : $\varepsilon = \dfrac{l' - l}{2} > 0$

Tồn tại hai số tự nhiên n_1 và n_2 sao cho :

$$n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \quad \Rightarrow u_n - l < \frac{l' - l}{2} \quad \Rightarrow u_n < \frac{l + l'}{2}$$

$$n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \varepsilon \Rightarrow l' - v_n < \frac{l' - l}{2} \quad \Rightarrow v_n > \frac{l + l'}{2}$$

Do đó : $n \geq \max(n_1, n_2) \Rightarrow u_n < v_n$

CHÚ Ý : Trong định lý 4 khi $u_n < v_n$ vẫn có thể $l = l'$. Chẳng hạn $-\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n}$; $\forall n \geq 1$ nhưng $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\dfrac{1}{n}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}$. Còn trong định lý 5 khi $l = l'$ thì ta chưa kết luận gì về thứ tự của u_n và v_n.

Định lý 6 : *Cho ba dãy* (u_n), (u_n) *và* (w_n) *với* $u_n \leq v_n \leq w_n$ *(kể từ một thứ hạng nào đó). Nếu* (u_n) *và* (w_n) *cùng hội tụ đến* l *thì* (v_n) *cũng hội tụ đến* l.

Chứng minh

Theo giả thiết, tồn tại số tự nhiên n_1 sao cho :

$$n \geq n_1 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$$

Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại số tự nhiên n_2 sao cho :

$$n \geq n_2 \Rightarrow \begin{cases} l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \\ l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon \end{cases}$$

Do đó :

$$n \geq \max(n_1, n_2) \quad \Rightarrow l - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon$$

Vậy dãy (v_n) cũng hội tụ đến l.

7. Dãy số tiến tới vô cực.

Định nghĩa :

* *Dãy (u_n) tiến tới $+\infty$ khi với mọi số $A > 0$ tồn tại số tự nhiên n_o sao cho mỗi khi có $n \geq n_o$ thì $u_n > A$.*

Ký hiệu : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *hoặc* $(u_n) \to +\infty$ *khi* $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \iff (\forall A > 0; \exists n_o \in N : n \geq n_o \Rightarrow u_n > A)$$

* *Dãy* (u_n) tiến tới $-\infty$ khi với mọi số $B < 0$, tồn tại số tự nhiên n_o sao cho mỗi khi có $n \geq n_o$ thì $u_n < B$.

Ký hiệu : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ hoặc $(u_n) \to -\infty$ khi $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff (\forall B < 0; \exists n_o \in N : n \geq n_o \Rightarrow u_n < B)$$

Các định lý về giới hạn vô cực

1 *Dãy* ($u_n + v_n$)

$u_n \backslash v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	V.Đ
$-\infty$	$-\infty$	V.Đ	$-\infty$

Dạng vô định $\infty - \infty$

2 *Dãy* ($u_n - v_n$)

$u_n \backslash v_n$	$l' \neq 0$	0	∞
$l \neq 0$	ll'	0	∞
0	0	0	V.Đ
∞	∞	V.Đ	∞

. Dạng vô định $0 . \infty$

. Các tích số có dấu định bởi qui tắc dấu

3 *Dãy* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

u_n \ v_n	$l' \neq 0$	0	∞	
$l \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\left\lvert\dfrac{u_n}{v_n}\right\rvert \to +\infty$	0	. Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$
0	0	V.Đ	0	. Áp dụng qui tắc dấu
∞	∞	$\left\lvert\dfrac{u_n}{v_n}\right\rvert \to +\infty$	V.Đ	

B BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Bài 1 : Dùng định nghĩa để Chứng minh :

1/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+2}{n+1} = 1$ 2/ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2-1}{2n^2+1} = \dfrac{1}{2}$

3/ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ (với $|q| < 1$)

Giải

Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý :

1/ $\left|\dfrac{n+2}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$

Chọn n_o là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$

Ta có : $n \geq n_o \Rightarrow \left|\dfrac{n+2}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

Vậy : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$

2/ $\left| \frac{n^2+1}{2n^2+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \iff \frac{3}{2(2n^2+1)} < \varepsilon$

$\iff n^2 > \frac{3-2\varepsilon}{4}$

Với $\varepsilon > 0$ khá nhỏ đủ cho $3 - 2\varepsilon > 0$ thì ta chọn n_o là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn $\sqrt{\frac{3-2\varepsilon}{4}}$. Ta có :

$n \geq n_o \Rightarrow \left| \frac{n^2-1}{2n^2+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

Vậy : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$

3/ Trong phần tóm tắt giáo khoa ta đã có một cách chứng minh công thức : $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ (với $|q| < 1$)

Bây giờ ta đưa thêm cách khác :

$|q| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1$ (dĩ nhiên $q \neq 0$)

Đặt : $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$ ($\alpha > 0$)

Ta có, theo bất đẳng thức Bernouilli

$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha$

Suy ra : $|q|^n < \frac{1}{n\alpha}$

Ta chọn n_o là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn $\frac{1}{\alpha . \varepsilon}$

Ta có : $n \geq n_o \Rightarrow |q|^n < \varepsilon$

$$\Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon$$

Vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ (với $|q| < 1$)

Bài 2 : a > 0 là số thực cho sẵn. Chứng minh : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Giải

Có ba trường hợp cần xét :

1 a = 1 Hiển nhiên là : $\sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1} = 1$

2 a > 1 Do a > 1 nên $\sqrt[n]{a} > 1$. Đặt $\sqrt[n]{a} = 1 + \varepsilon_n$ ($\varepsilon_n > 0$)

Từ đó ta có : $a = (1 + \varepsilon_n)^n \geq 1 + n.\varepsilon_n$ $(n \geq 1)$

Suy ra : $0 \leq \varepsilon_n \leq \dfrac{a-1}{n}$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a-1}{n} = 0$ cho nên :

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

3 0 < a < 1 Do 0 < a < 1 nên $b = \dfrac{1}{a} > 1$

Theo 2 đã **Chứng minh** ở trên, ta được :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Tóm lại, nếu a > 0 cho sẵn thì ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Bài 3 : n ≥ 1 là số tự nhiên. Chứng minh

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Giải

Do n ≥ 1 nên $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Đặt :

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \varepsilon_n \ (\varepsilon_n \geq 0)$$

Do đó :

$$n = (1 + \varepsilon_n)^n = 1 + n\,\varepsilon_n + \frac{n(n-1)}{2}.\varepsilon_n^2 + ... + n.\varepsilon_n^{n-1} + \varepsilon_n^n$$

Suy ra được :

$$n > \frac{n(n-1)}{2}.\varepsilon_n^2 \Rightarrow 0 \leq \varepsilon_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

Vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bài 4 : Xét tính hội tụ của các dãy định bởi :

1/ $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

2/ $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{np}$ **(p là số nguyên dương cho sẵn)**

Giải

Phương pháp : Dùng định lý 3 (đủ) trong phần trên :

- Xem dãy tăng hay giảm
- Xem dãy có bị chặn trên (chặn dưới) không
- Kết luận

(Người ta không yêu cầu tính giới hạn các dãy số ấy)

1/ Xét (u_n)

Ta có : $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Do đó : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, $\forall n \geq 1$

Do đó dãy (u_n) tăng .

Với mọi số tự nhiên $k \geq 2$ ta đều có :

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{kk} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Cho nên :

$$\frac{1}{1^2} = 1$$

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

....

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Cộng tất cả các bất đẳng thức lại theo từng vế, ta có :

$$u_n < 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Suy ra : $u_n < 2$; $\forall n \geq 1$: dãy (u_n) bị chặn trên

Tóm lại : dãy (u_n) tăng và bị chặn trên nên là dãy hội tụ.

2/ Xét (v_n)

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{np}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{np} + \frac{1}{np+1} + ... + \frac{1}{(n+1).p}$$

Do đó : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{np+1} + \frac{1}{np+2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)p} - \frac{1}{n}$

Nhưng : $\frac{1}{np+1} < \frac{1}{np}$

$\frac{1}{np+2} < \frac{1}{np}$

....

$\frac{1}{(n+1)p} < \frac{1}{np}$

Suy ra :

$$v_{n+1} - v_n < \underbrace{\left(\frac{1}{np} + \frac{1}{np} + \ldots + \frac{1}{np}\right)}_{n \text{ số hạng}} - \frac{1}{n} = 0 \ (n \geq 1)$$

Từ đó (v_n) là dãy giảm.

Mặt khác, hiển nhiên là ta có :

$v_n > 0$; $\forall$ $n \geq 1$: dãy (v_n) bị chặn dưới

Tóm lại : dãy (v_n) giảm và bị chặn dưới nên là dãy hội tụ.

Bài 5 : Hai dãy (u_n) và (v_n) được gọi là tiếp cận nhau khi chúng thỏa ba điều kiện sau đây :

(i) (u_n) là dãy tăng

(ii) (v_n) là dãy giảm

(iii) $\lim_{n \to +\infty} |u_n - v_n| = 0$

1/ Chứng minh rằng hai dãy tiếp cận nhau thì hội tụ đến cùng một giới hạn

2/ Áp dụng cho : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Chứng tỏ rằng giới hạn chung của hai dãy là một số vô tỷ.

Giải

1/ Chứng minh (u_n) và (v_n) hội tụ đến cùng một giới hạn

Ta cứ cho rằng là ba điều kiện đúng ngay từ n = 1 (nếu không ta loại bớt đi một số số hạng). Xét dãy (w_n) định bởi :

$$w_n = v_n - u_n$$

Ta có : $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$

$$= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

Theo giả thiết (u_n) là dãy tăng và (v_n) là dãy giảm

nên :

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n > 0 \\ v_{n+1} - v_n < 0 \end{cases}$$

Cho nên :

$$w_{n+1} - w_n < 0$$

Suy ra (w_n) = ($v_n - u_n$) là dãy giảm. Nhưng theo giả thiết (iii) dãy này hội tụ đến 0 cho nên :

$$v_n - u_n \leq 0 => v_n \leq u_n$$

Như vậy ta có :

$$u_1 < u_2 < ... < u_n \leq v_n < ... < v_2 < v_1$$

Dãy (u_n) tăng và bị chặn trên (bởi v_1 chẳng hạn) nên hội tụ. Từ đó áp dụng định lý giới hạn vào (iii) ta được :

$$\lim_{n\to+\infty} | u_n - v_n | = 0 => \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$$

$$=> \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

CHÚ Ý : Muốn áp dụng được định lý giới hạn vào giả thiết (iii) rõ ràng là ta phải chứng minh (u_n) và (v_n) là những dãy số hội tụ trước đã.

2/ Áp dụng :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Ta kiểm tra ba điều kiện của hai dãy tiếp cận nhau.

(i) (u_n) là dãy tăng. Quả vậy :

$$u_{n+1} - u_n = (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{(n+1)!}) - (1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!})$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} > 0 \ ; \ \forall n \geq 1$$

(ii) (v_n) là dãy giảm. Quả vậy :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!}$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + (\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!})$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0 \ , \ \forall n \geq 2$$

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} | u_n - v_n | = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$

Như vậy (u_n) và (v_n) là hai dãy tiếp cận nhau nên hội tụ đến cùng một giới hạn e. Do định lý về thứ tự và giới hạn ta có :

$$u_n < e < v_n$$

Giả sử e là số hữu tỷ : $e = \frac{p}{n_o}$ với p, n_o là hai số tự nhiên. Ta có :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n_o!} < \frac{p}{n_o} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n_o!} + \frac{1}{n_o!}$$

Nhân tất cả cho n_o ! ta được :

$$A < p(n_o - 1) < A + 1$$

Trong đó A là một số tự nhiên. Như vậy ở giữa hai số tự nhiên A và A + 1 còn có một số tự nhiên khác là $p(n_o - 1)$; Vô lý ! Vậy e là số hữu tỷ.

* *

Bài 6 : Coi dãy số định bởi : $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$ $(n \geq 1)$

1/ Chứng tỏ rằng kể từ một thứ hạng nào đó, dãy (u_n) là dãy giảm.

2/ Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ và tính $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Giải

1/ (u_n) là dãy giảm kể từ n_o nào đó.

Ta chú ý là $u_n > 0$; $\forall$ $n \geq 1$

Lập tỷ số :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1} \quad (1)$$

Do đó : $u_{n+1} < u_n \iff \dfrac{10}{n+1} < 1$

$$\iff n + 1 > 10 \iff n > 9$$

Qua đó ta thấy dãy giảm kể từ $n_o = 10$

2/ Chứng minh (u_n) hội tụ. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi số 0 nên hội tụ

Ta có, theo (1) với $n > 10$:

$$u_n = \frac{10}{n} \cdot u_{n-1} \Rightarrow \qquad u_n \leq \frac{10}{11} u_{n-1}$$

Tương tự : $$u_{n-1} \leq \frac{10}{11} \cdot u_{n-2}$$

....

$$u_{11} \leq \frac{10}{11} \cdot u_{10}$$

Nhân tất cả các bất đẳng thức ấy và rút gọn :

$$0 < u_n < \left(\frac{10}{11}\right)^{n-10} \cdot u_{10}$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \left(\frac{10}{11}\right)^{n-10} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Bài 7 : 1/ a > 1 cho sẵn. Chứng minh : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$

2/ Tổng quát : a > 1 và p > 0 cho sẵn ; chứng minh :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$$

Giải

1/ Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$ (a > 1)

Do a > 1 cho sẵn nên ta có thể viết :

$$a = 1 + h \ (h > 0, \text{ cố định})$$

Từ khai triển Newton của $(1 + h)^n$ ta suy ra :

$$a^n > \frac{n(n-1)}{2}.h^2 \Rightarrow \frac{a^n}{n} > \frac{(n-1)}{2}.h^2$$

Khi n $\to +\infty$ thì $\frac{n-1}{2} \to +\infty$ do đó : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$

2/ Chứng minh trường hợp tổng quát

Ta viết : $$\frac{a^n}{n^p} = \left[\frac{(a^{\frac{1}{p}})^n}{n}\right]^p$$

Đặt : $b = a^{1/p}$. Ta có : b > 1

Theo câu 1/ thì : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$

Do đó : $\lim_{n\to+\infty} (\frac{b^n}{n})^p = +\infty$ (p > 0)

Tức là : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{a^p} = +\infty$

* *

C BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tính giới hạn các dãy sau đây :

a/ $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{5^k}$ **(n ≥ 0)** **b/** $u_n = \frac{7^{n+1} + 6^{n+1}}{7^n + 6^n}$ **(n ≥ 0)**

c/ $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$ **(n ≥ 1)**

2. Tính : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$

Hướng dẫn : n ≥ 3 ; gọi p là số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$. Chứng tỏ :

- $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^{n-p+1}}$
- $n - p + 1 \geq \frac{n}{2}$

Từ đó suy ra : $\sqrt[n]{n!} > (\frac{n}{2})^{1/2}$. Kết luận ?

3. a > 0 cho sẵn. Tính : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$

Hướng dẫn : Gọi [a] là phần nguyên của a. Khi n > [a] + 1 thì ta có thể viết :

$$u_n = \frac{\overbrace{a.a\ldots a}^{n-[a] \text{ thừa số}}}{n.(n-1)\ldots([a]+1)} \cdot \frac{\overbrace{a.a\ldots a}^{[a] \text{ thừa số}}}{[a]!}$$

Suy ra : $u_n \leq k \cdot q^{n-[a]}$ với $q = \frac{a}{[a]+1}$ và k hằng số

4. Xét sự hội tụ của các dãy sau đây :

a/ $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{np}$ (p nguyên dương cho sẵn)

b/ $u_n = (1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) \ldots (1 + \frac{1}{2^n})$ $(n \geq 1)$

Hướng dẫn :

a/ Chứng minh dãy giảm

b/ Chứng minh dãy tăng. Để chứng minh dãy bị chặn trên ta chứng minh : $u_n \leq 3 \ (1 - \frac{1}{2^n})$ bằng qui nạp

5. Cho dãy (u_n) hội tụ đến l. Đặt :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} \text{ (Trung bình Césaro)}$$

Chứng minh rằng (v_n) cũng hội tụ đến l.

Áp dụng : 1/ Cho $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

Chứng tỏ : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

2/ Cho : $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + \frac{2}{k})^{k/n}$

Chứng tỏ : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^2$

Hướng dẫn : n_o là một số tự nhiên thích hợp. (số nào ?)

Ta có : $v_n - l = \frac{(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_o}) + (u_{n_o+1} + \ldots + u_n) - nl}{n}$

$= a_n + b_n$

Rồi chứng minh :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \text{ và } \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

6. a là số thực cho sẵn Tính :

$$\lim_{n\to\infty} u_n \text{ với } u_n = \cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}\ldots\cos\frac{a}{2^n}$$

Hướng dẫn :

Dùng công thức $\cos\frac{a}{2} = \dfrac{\sin a}{2\sin\frac{a}{2}}$ để tính u_n

7. Tính giới hạn các dãy số sau đây :

a/ $u_n = (1 - \frac{1}{2}).(1 - \frac{1}{3})\ldots(1 - \frac{1}{n})$

b/ $v_n = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}).(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})\ldots(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$

c/ $w_n = (1 - \frac{1}{2^2}).(1 - \frac{1}{3^2})\ldots(1 - \frac{1}{n^2})$

Đáp số : a/ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

b/ $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

c/ $\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}$

8. Cho hai số thực dương a, b với a < b. Ta định dãy (a_n) và dãy (b_n) như sau :

$$a_1 = \frac{a+b}{2}\ ;\ a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \ldots, a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \ldots$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b}\ ;\ b_2 = \sqrt{a_2 b_1}, \ldots, b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}, \ldots$$

Chứng Minh rằng (a_n) và (b_n) là hai dãy hội tụ đến cùng một giới hạn. Tính giới hạn đó.

Hướng dẫn : . Đưa về bài 6

. Mối quan hệ giữa a_n và b_n

§4 DÃY SỐ $u_n = f(u_{n-1})$

A MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Một định lý về hàm liên tục

(u_n) là một dãy trong đoạn [a, b], f là một hàm số xác định trên [a,b]

(i) *Nếu* (u_n) hội tụ đến $l \in [a, b]$ và nếu f liên tục tại l thì dãy $(f(u_n))$ hội tụ đến $f(l)$.

(ii) *Nếu với bất kỳ dãy* (u_n) nào hội tụ đến $l \in [a, b]$ mà các dãy tương ứng $(f(u_n))$ hội tụ đến $f(l)$ thì hàm số f liên tục tại l.

Chứng minh

Chứng minh (i)

Hàm số f liên tục tại l nên :

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \alpha > 0 \ : |x - l| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(l)| < \varepsilon$$

Với $\alpha > 0$ đó, do (u_n) hội tụ đến l nên :

$$n_o \in N : n \geq n_o \Rightarrow |u_n - l| < \alpha$$

Khi ấy thì : $n \geq n_o \Rightarrow |f(u_n - f(l)| < \varepsilon$

Điều này chứng tỏ $(f(u_n))$ hội tụ đến $f(l)$

Chứng minh (ii)

Giả sử f không liên tục tại l. Thế thì tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho bất kỳ $\alpha > 0$ nào bao giờ cũng tìm được x ở lân cận l bán kính α và

$|f(x) - f(l)| > \varepsilon$

Khi lấy $\alpha = 1$ ta có : $\begin{cases} |u_1 - l| < 1 \\ |f(u_1) - f(l)| \geq \varepsilon \end{cases}$

Khi lấy $\alpha = \frac{1}{2}$ ta có : $\begin{cases} |u_2 - l| < \frac{1}{2} \\ |f(u_2) - f(l)| \geq \varepsilon \end{cases}$

....

Khi lấy $\alpha = \frac{1}{n}$ ta có : $\begin{cases} |u_n - l| < \frac{1}{n} \\ |f(u_n) - f(l)| \geq \varepsilon \end{cases}$

Như thế là ta có cùng một lúc dãy (u_n) tiến đến l và dãy $(f(u_n))$ không tiến tới $f(l)$: trái với giả thiết. Vậy hàm số f liên tục tại l.

2. Dãy $u_n = f(u_{n-1})$

Cho hàm số f liên tục trên [a, b] và có miền giá trị chứa trong [a, b]. Xem dãy số định bởi :

$$\begin{cases} u_1 \in [a, b] \\ u_n = f(u_{n-1}) \ (n \geq 2) \end{cases}$$

Rõ ràng là dãy số hoàn toàn được xác định vì $u_n \in [a, b]$ với $n \geq 1$

Định lý 1 : Nếu f là hàm số tăng thì dãy (u_n) đơn điệu và hội tụ đến l, nghiệm của phương trình $f(x) = x$

Chứng minh

Ta có : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$

Do hàm số f tăng nên $f(u_n) - f(u_{n-1})$ cùng dấu với $u_n - u_{n-1}$; suy ra $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_n - u_{n-1}$ .Cứ thế tiếp tục ta đi đến :

$u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_2 - u_1$

Từ đó : – Nếu $u_2 > u_1$ thì dãy (u_n) tăng

– Nếu $u_2 < u_1$ thì dãy (u_n) giảm

Dãy (u_n) đơn điệu và bị chặn nên hội tụ đến l. Và theo định lý mở đầu về hàm liên tục thì $(f(u_n))$ hội tụ đến $f(l)$, do đó :

$$l = f(l)$$

Định lý đã được chứng minh xong

Định lý 2 : Nếu f là hàm số giảm thì các dãy con (u_{2n}) và (u_{2n+1}) của dãy (u_n) đơn điệu và ngược chiều biến thiên.

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh bổ đề :

Nếu f là hàm nghịch biến thì fof là hàm đồng biến.

Thật vậy : lấy hai phần tử x, x' $\in$ [a, b] , ta có :

$$x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$$

Do giả thiết ban đầu nên f(x), f(x') ∈ [a, b] do đó :

$$f(x) > f(x') \Rightarrow f(f(x)) < f(f(x'))$$

Vậy :

$$x < x' \Rightarrow (fof)(x) < (fof)(x')$$

Đặt : $v_n = u_{2n}$. Ta chứng minh dãy (v_n) đơn điệu

Thật vậy :

$v_n = u_{2n} = f(u_{2n-1}) = f(f(u_{2n-2})) = (fof)(v_{n-1})$

Do fof là hàm đồng biến (tăng) nên theo định lý 1, dãy $(v_n) = (u_{2n})$ là dãy đơn điệu.

Đặt : $w_n = u_{2n+1}$. Ta chứng minh dãy (w_n) đơn điệu

Thật vậy :

$$w_n = u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(f(u_{2n-1})) = (fof)(w_{n-1})$$

Do đó $(w_n) = (u_{2n+1})$ là dãy đơn điệu.

Cuối cùng ta chứng minh (v_n) và (w_n) là hai dãy ngược chiều biến thiên. Ta có :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= u_{2n+3} - u_{2n+1} \\ &= f(u_{2n+2}) - f(u_{2n}) \\ &= f(v_{n+1}) - f(v_n) \end{aligned}$$

Do f nghịch biến nên $f(v_{n+1}) - f(v_n)$ trái dấu với $v_{n+1} - v_n$.

Suy ra $w_{n+1} - w_n$ và $v_{n+1} - v_n$ trái dấu nhau, nghĩa là (w_n) và (v_n) có chiều biến thiên ngược nhau.

GHI CHÚ Các dãy con (u_{2n}) và (u_{2n+1}) của (u_n) đơn điệu và bị chặn nên hội tụ lần lượt tới l_1 và l_2. Dãy (u_n) vẫn có thể không hội tụ nếu $l_1 \neq l_2$.

TÓM TẮT : Với $u_n = f(u_{n-1})$ và f liên tục trên [a, b] .

Để khảo sát dãy (u_n) ta tiến hành như sau :

1/ Kiểm tra xem $u_n \in [a, b]$ không ?

2/ f tăng hay giảm ?

Nếu f tăng thì dãy (u_n) hội tụ về nghiệm $l \in [a, b]$ của phương trình f(x) = x

Nếu f giảm thì xét riêng hai dãy (u_{2n}) và (u_{2n+1})

B BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Bài 1 : Khảo sát dãy (u_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}}\right) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

(Dãy Héron)

Giải

Hiển nhiên $u_n > 0$, $\forall n \geq 1$. Ngoài ra ta còn có :

$$u_n \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{u_{n-1} \cdot \frac{2}{u_{n-1}}} = \sqrt{2} \quad (n \geq 2)$$

Như vậy trừ u_1, dãy số xem như thuộc đoạn $[\sqrt{2}, +\infty]$

Xét hàm số : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$

Đạo hàm : $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2} \geq 0$; $\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty]$

Suy ra hàm số tăng trên $[\sqrt{2}, +\infty)$

Ta có : $u_2 = \frac{3}{2}$; $u_3 = \frac{17}{12}$ => $u_3 - u_2 < 0$

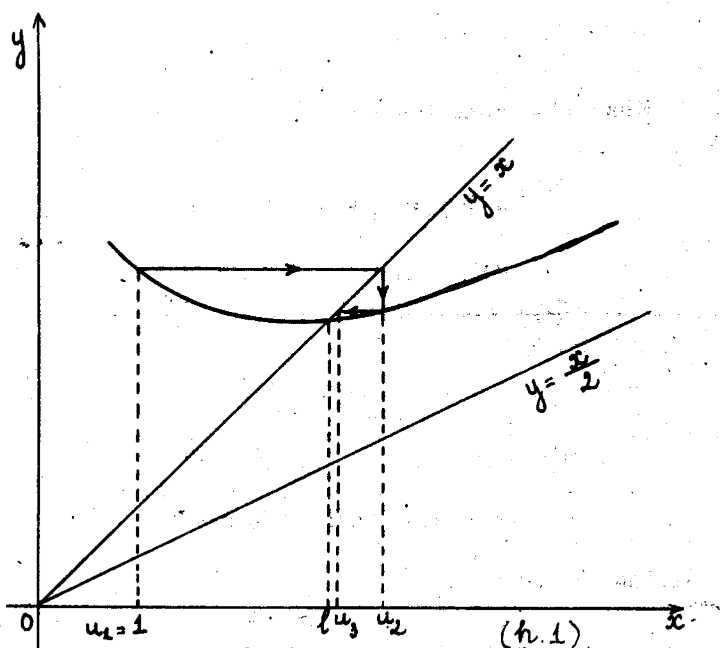
Dãy (u_n) *l*à dãy giảm. (Chú ý *l*à ta không dùng $u_1 = 1$ bởi vì $u_1 \notin [\sqrt{2}, +\infty])$

Dãy (u_n) giảm và bị chặn nên hội tụ đến *l*, nghiệm của phương trình:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x}) = x \Leftrightarrow x^2 = 2$$

Nhưng $l \geq \sqrt{2}$ *nên* $l = \sqrt{2}$

Kết *l*uận : (u_n) *l*à dãy giảm, hội tụ đến $l = \sqrt{2}$ (có hình minh họa) (h.1)



Bài 2 :

Khảo sát dãy(u_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 1 + \dfrac{1}{u_{n-1}} \ (n \geq 2) \end{cases}$$

Giải

Hiển nhiên $1 \leq u_n \leq 2$; $\forall n \geq 1$. Dãy số xem như thuộc đoạn [1,2]

Xét hàm số : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

Đạo hàm : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$; $\forall x \in [1, 2]$

Hàm số giảm trên [1, 2] . Dãy (u_n) được xem như hợp của hai dãy con (u_{2n}) và (u_{2n+1}) có chiều biến thiên ngược nhau.

Ta có : $u_2 = 2$; $u_3 = \frac{3}{2}$; $u_4 = \frac{5}{3}$.

Do đó :

$$u_4 - u_2 = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow (u_{2n}) \text{ là dãy giảm.}$$

$$u_3 - u_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow (u_{2n+1}) \text{ là dãy tăng}$$

Các dãy con này đơn điệu và bị chận nên hội tụ.

Còn dãy (u_n) nếu có hội tụ thì giới hạn l của nó sẽ là nghiệm của phương trình :

$$l = 1 + \frac{1}{l} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 : \text{loại} \\ l_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : \text{nhận} \end{array}\right.$$

Ta suy ra : $$u_n - l = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{l} = \frac{l - u_{n-1}}{l\, u_{n-1}}$$

Do đó : $$|u_n - l| \le \frac{1}{l} \cdot |u_{n-1} - l| \quad (\text{do } u_{n-1} \ge 1)$$

Từ đó ta suy ra :

$$|u_{n-1} - l| \le \frac{1}{l} \cdot |u_{n-2} - l|$$

....

$$|u_3 - l| \le \frac{1}{l} \cdot |u_2 - l|$$

$$|u_2 - l| \le \frac{1}{l} \cdot |u_1 - l|$$

Nhân tất cả các bất đẳng thức ta được :

$$|u_n - l| < \frac{1}{l^{n-1}} |l - 1| \text{ (do } u_1 = 1)$$

mà $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{l^{n-1}} = 0$ cho nên :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

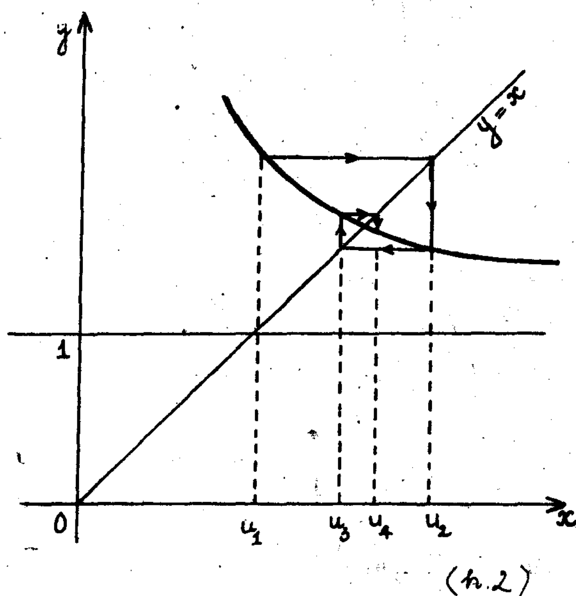
Kết luận. (u_n) được phân ra làm hai dãy con :

(u_{2n}) là dãy giảm

(u_{2n+1}) là dãy tăng

(u_n) là dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(có hình minh họa) (h.2)



(h.2)

Bài 3

Khảo sát dãy (u_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = 1 - u_{n-1}^2 \ (n \geq 2) \end{cases}$$

Giải

Trước hết ta chứng minh $u_n \in [0, 1]$; $\forall n \geq 1$

Thật vậy : $u_1 = \dfrac{1}{2} \in [0, 1]$

Giả sử : $u_k \in [0, 1]$ với $k > 1$

Thì : $\begin{cases} u_{k+1} = 1 - u_k^2 \\ 0 \leq u_k \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1 \Rightarrow u_{k+1} \in [0, 1]$

Vậy $u_n \in [0, 1]$; $\forall n \geq 1$

Xét hàm số : $f(x) = 1 - x^2$

Đạo hàm : $f'(x) = -2x \leq 0$, $\forall x \in [0, 1]$

Đây là hàm số giảm trên đoạn [0, 1]. Dãy (u_n) được xem như là hợp của hai dãy con (u_{2n}) và (u_{2n+1}) có chiều biến thiên ngược nhau.

Ta có : $u_2 = \dfrac{3}{4}$; $u_3 = \dfrac{7}{16}$; $u_4 = \dfrac{207}{256}$

Cho nên :

$$u_4 - u_2 = \frac{207}{256} - \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow (u_{2n}) \text{ là dãy tăng}$$

$$u_3 - u_1 = \frac{7}{16} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow (u_{2n+1}) \text{ là dãy giảm}$$

Các dãy con này đơn điệu và bị chặn nên hội tụ đến l_1 và l_2.

Ta thấy rằng :

$$\frac{3}{4} \leq u_{2n} \leq 1 \Rightarrow l_1 \in [\frac{3}{4}, 1]$$

$$0 \le u_{2n+1} \le \frac{1}{2} \Rightarrow l_2 \in [0, \frac{1}{2}]$$

Mà $[0, \frac{1}{2}] \cap [\frac{3}{4}, 1] = \varnothing$ cho nên $l_1 \ne l_2$

Vậy dãy (u_n) không hội tụ

Tóm lại

- . (u_n) được phân ra làm hai dãy con :

  (u_{2n}) là dãy tăng

  $(u_{2n+1}$ là dãy giảm

- . (u_n) là dãy không hội tụ

CHÚ Ý : Phương trình $f(x) = x$ tức là $x^2 + x - 1 = 0$

Có nghiệm $l = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in [0, 1]$ nhưng dãy (u_n) không hội tụ.

Bài 4 : Khảo sát dãy (u_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1 \text{ (cho sẵn)} \\ u_n = \frac{1}{3}(2u_{n-1}^3 + 2u_{n-1} - 1) \quad (n \ge 2) \end{cases}$$

Giải

Xét hàm số :

$$y = f(x) = \frac{1}{3}(2x^3 + 2x - 1)$$

Đạo hàm : $y' = 2x^2 + \frac{2}{3} > 0, \quad \forall x \in R$

Hàm số luôn luôn tăng

Dãy (u_n) hoàn toàn được xác định. Nếu nó hội tụ đến l thì nhất định l phải là nghiệm của phương trình :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 1 = 3x$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 2x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = l = 1$$

Mặt khác ta có :

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{3}(2u_1^3 + 2u_1 - 1) - u_1$$
$$= \frac{1}{3}(u_1 - 1).(2u_1^2 + 2u_1 + 1)$$

Do $2u_1^2 + 2u_1 + 1 > 0$ bất chấp giá trị của u_1 nên $u_2 - u_1$ có dấu của $u_1 - 1$. Có ba trường hợp có thể xảy ra :

1/ $u_1 = 1$ Ta có $u_2 = 1$. Và qui nạp được :

$$u_n = 1 \; ; \; \forall n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

2/ $u_1 < 1$

$$u_2 - u_1 < 0 \Rightarrow u_2 < u_1 .$$

Dãy (u_n) giảm và do đó xa dần số $l = 1$ nên không phải là dãy hội tụ.

3/ $u_1 > 1$

$$u_2 - u_1 > 0 \Rightarrow u_2 > u_1 .$$

Dãy (u_n) tăng và cũng xa dần số $l = 1$ nên không phải là dãy hội tụ.

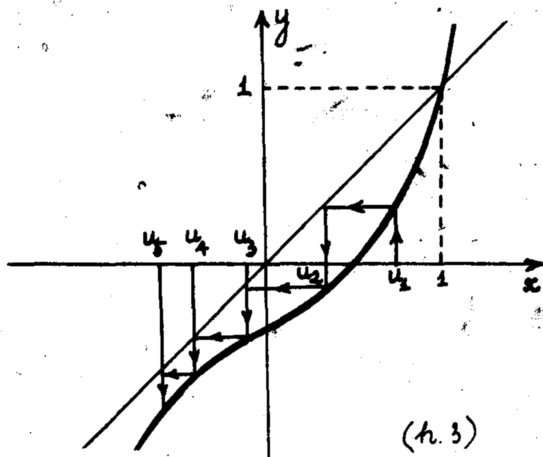
Tóm lại

Nếu $u_1 = 1$ thì $u_n = 1$; $\forall$ n

Nếu $u_1 < 1$ thì (u_n) là dãy giảm và không hội tụ.

Nếu $u_1 > 1$ thì (u_n) là dãy tăng và không hội tụ.

GHI CHÚ : Một lần nữa ta thấy phương trình f(x) = x có nghiệm nhưng chưa chắc dãy số đã hội tụ. (có hình minh họa) (h.3)



Bài 5 : Khảo sát dãy (u_n) định bởi :

$$u_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ \ldots +\sqrt{a}}}}}_{\text{n dấu căn số}} \quad (n \geq 1)$$

n dấu căn số

Trong đó a > 0 cho sẵn

Giải

Từ biểu thức của u_n ta có thể viết :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{a} \\ u_n = \sqrt{a + u_{n-1}} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

Hiển nhiên *l*à : $u_n \geq \sqrt{a}$; $\forall\ n \geq 1$

Tức *l*à : $u_n \in [\ \sqrt{a}\ , +\infty)$; $\forall\ n \geq 1$

Xét hàm số : $f(x) = \sqrt{a + x}$; $x \in [\ \sqrt{a}\ , +\infty)$

Đạo hàm : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a+x}} > 0$

Hàm số tăng trên [$\sqrt{a}$, + ∞) . Ta có :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{a} \\ u_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}} \end{cases} \Rightarrow u_2 - u_1 > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ là dãy tăng}$$

Ta chứng minh bằng qui nạp :

$$u_n \le \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \; ; \forall \; n \ge 1 \; (*)$$

– Với n = 1

$$u_1 = \sqrt{a} \le \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{a} \le 1 + \sqrt{1+4a}$$

$$\Leftrightarrow 4a \le 1 + 1 + 4a + 2\sqrt{1+4a}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1+4a} \ge 0 : \text{hiển nhiên}$$

– Giả sử có :

$$u_k \le \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \text{ với } k > 1$$

Thế thì : $u_{k+1} = \sqrt{a+u_k} \le \sqrt{a + \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{4a+2+2\sqrt{1+4a}}}{2} = \frac{\sqrt{1+4a+2\sqrt{1+4a}+1}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

Bất đẳng thức (*) đúng với k + 1, cho nên đúng với mọi n.

Dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên nên hội tụ đến l, đó là nghiệm của phương trình trong miền [$\sqrt{a}$, + ∞)

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{a+x} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ a + x = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{a} \\ x^2 - x - a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

Kết luận : (u_n) là dãy số tăng, hội tụ và : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

Bài 6 :

1/ a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số :

$$y = f(x) = 2(x - 1) - \text{arctg } x$$

b/ Chứng tỏ rằng phương trình f(x) = 0 có một nghiệmduy nhất là $\alpha \subset (1, \sqrt{3})$

2/ Xem dãy (u_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = 1{,}5 \\ u_n = 1 + \dfrac{1}{2} \text{arctg } u_{n-1} \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng dãy (u_n) hội tụ đến α . Tính giá trị của n để u_n gần bằng α , sai số ε ($\varepsilon > 0$ cho trước).

(Đề thi Tú Tài Pháp ; 90)

Giải

1/ a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm y = f(x) .

Hàm số xác định và liên tục trên R

Đạo hàm : $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{1 + 2x^2}{1 + x^2} > 0 \; ; \forall \; x \in R$

Hàm số luôn luôn tăng, không có cực trị

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) = -\infty \; ; \lim_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Tiệm cận : – Không có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang

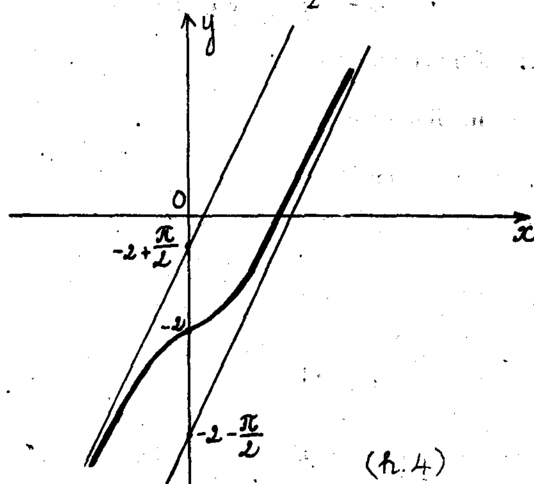
Tiệm cận xiên :

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{n\to\pm\infty} \left(2 - \frac{2}{x} - \frac{arctgx}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} [f(x) - 2x] = -2 - \frac{\pi}{2}\ ; \lim_{n\to-\infty} [f(x) - 2x] = -2 + \frac{\pi}{2}$$

Suy ra hai tiệm cận xiên : $y = 2x \mp \frac{\pi}{2} - 2$

Đồ thị :



b/ Chứng tỏ rằng phương trình f(x) = 0 có nghiệm duy nhất $\alpha \in (1, \sqrt{3})$

$$\begin{cases} f \text{ liên tục trên } (1, \sqrt{3}) \\ f(1) = -\frac{\pi}{4} < 0 \\ f(\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} - 1) - \frac{\pi}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm } \alpha \in (1, \sqrt{3})$$

Do f luôn tăng trên R nên nghiệm α là duy nhất

2/ Chứng tỏ (u_n) hội tụ và $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

Xét hàm số : $g(x) = 1 + \frac{1}{2}$ arctgx

Đạo hàm : $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{2}, \forall x \in R$

Do định lý số gia giới nội ta có :

$$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha| \ (1)$$

Nhưng mà : $u_n = g(u_{n-1})$ và $g(\alpha) = \alpha$

Cho nên ta được : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$

Áp dụng liên tiếp:

$$|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-2} - \alpha|$$

....

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \cdot |u_1 - \alpha|$$

Suy ra : $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n-1} |u_1 - \alpha|$

Do $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^{n-1} = 0$ nên bất đẳng thức trên chứng tỏ (u_n) hội tụ đến α.

Ta muốn tính n để : $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$

Muốn vậy ta chỉ cần chọn n sao cho : $(\frac{1}{2})^n \cdot |u_1 - \alpha| \leq \varepsilon$

Lấy logarit Néper hai vế : $-n \cdot ln2 \leq ln\,\varepsilon - ln|u_1 - \alpha|$

$$\Leftrightarrow n \cdot ln2 \geq ln|u_1 - \alpha| - ln\,\varepsilon$$

Do $\alpha \in (1, \sqrt{3})$ nên $|u_1 - \alpha| = |\frac{3}{2} - \alpha| < \sqrt{3} - 1$, nên có thể chọn :

$$n \geq \frac{\ln(\sqrt{3} - 1) - \ln\varepsilon}{ln2}$$: là đạt yêu cầu

C BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1 Khảo sát dãy (u_n) định bởi :

1/ $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = \dfrac{1 + u_{n-1}}{2 + u_{n-1}} \quad (n \geq 2) \end{cases}$

2/ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{3 + 2u_{n-1}}{2 + u_{n-1}} \quad (n \geq 2) \end{cases}$

2. Khảo sát dãy (u_n) định bởi $u_1 > 0$ và $u_n = \sqrt{u_{n-1}}$

Hướng dẫn .. **Xét trường hợp $u_1 = a > 1$**

. Sau đó nếu $0 < u_1 = a < 1$ thì đặt : $b = \dfrac{1}{a}$

3. Khảo sát dãy (u_n) định bởi :

$\begin{cases} u_1 = a \ (a \neq 0 \text{ và } a \neq 1) \\ u_n = 1 - \dfrac{1}{u_{n-1}} \ (n \geq 2) \end{cases}$

Trả *lời* : Dãy không hội tụ. Tại sao ?

4. Khảo sát dãy (u_n) định bởi :

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{1}{1 + u_{n-1}} \ (n \geq 2) \end{cases}$

5. Khảo sát dãy (u_n) định bởi :

$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{1}{2}(1 + u^2_{n-1}) \ (n \geq 2) \end{cases}$

Hướng dẫn : **– Chứng minh dãy tăng**

– Chứng minh : $u_n \leq 1$, $\forall$ n

6. Cho dãy (u_n) định bởi u_1 và hệ thức :

$$(n+1)^2 . u_n = (n-1)^2 . u_{n-1} - n \ (n \geq 2)$$

1/ Đặt $v_n = u_n + \frac{1}{4}$ $(n \geq 2)$. Tính v_n theo v_{n-1} từ đó :

2/ Suy ra : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ **và** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Đáp số : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{4}$$

7. Cho hàm số g định trên đoạn [0, 1] bởi :

$$g(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{5/3}$$

1/ a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số .

b/ Chứng minh : $-\frac{5}{6} \leq g'(x) \leq 0$; $\forall x \in [0, 1]$

c/ Chứng minh phương trình g(x) = x có nghiệm duy nhất $\alpha \in [0, 1]$

2/ Xem dãy (u_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_n = g(u_{n-1}) \ (n > 1) \end{cases}$$

a/ Chứng minh : $u_n \in [0, 1]$; $\forall\ n \geq 1$

b/ Chứng minh : $| u_n - \alpha | \leq k . | u_{n-1} - \alpha |$; $\forall n \geq 1$ **trong đó k là một hằng số.**

c/ Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

* *

§5 DÃY QUI NẠP TUYẾN TÍNH

A MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Dãy qui nạp tuyến tính cấp 1

$$\begin{cases} u_1 \\ u_n = a \cdot u_{n-1} \text{ (n} \geq 2 \text{ và } a \neq 0) \end{cases}$$

Đây chính là cấp số nhân công bội a đã xét ở §2

$$\begin{cases} u_1 \\ u_n = au_{n-1} + b \text{ (} a \neq \text{ và } b \neq \text{; } n \geq 2) \end{cases}$$

Có thể đưa dãy này về cấp số nhân. Thật vậy, đặt :

$$v_n = u_n + h \text{ (h : 1 hằng số nào đó)}$$

(v_n) *là* cấp số nhân công bội a :

$$v_n = a \cdot v_{n-1} \iff u_n + h = a(u_{n-1} + h)$$

$$\iff u_n + h = \underbrace{(au_{n-1} + b)}_{u_n} + ah - b$$

$$\iff h = \frac{b}{a-1} \text{ (với } a \neq 1)$$

Còn nếu a = 1 thì hiển nhiên (u_n) *là* cấp số cộng :

Thí dụ : Cho dãy (u_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Ta đưa về cấp số nhân như sau :

Đặt : $v_n = u_n + h$

như trên, ta tính được h = 3

Do đó : $v_n = u_n + 3 = 2u_{n-1} + 6 = 2(u_{n-1} + 3) = 2v_{n-1}$

Vậy (v_n) *là* cấp số nhân công bội a = 2

2. Dãy qui nạp tuyến tính cấp 2

Dạng của loại dãy quan trọng này là :

$$\begin{cases} u_1, u_2 \\ u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2} \text{ (1) (a, b : hằng số và b khác 0)} \end{cases}$$

Cũng như tất cả các phần trên, ta chỉ đề cập đến trường hợp dãy số thực mà thôi.

Với n cho sẵn dĩ nhiên là ta tính tường minh được u_n bằng cách tính u_3, u_4, ... Điều này cho thấy rằng tồn tại duy nhất một dãy số thỏa vấn đề đặt ra.

Chúng ta thử tìm xem tồn tại không các dãy (r^n) với r *là* số thực khác 0 thỏa (1). Thế thì phải có :

$$r^n = ar^{n-1} + br^{n-2} \iff r^2 - ar - b = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) gọi là phương trình đặc trưng của dãy (u_n). Có 2 trường hợp :

1/ *(2) có hai nghiệm phân biệt r_1* và r_2. Các dãy (r_1^n) và (r_2^n) thỏa (1) do đó dãy $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)$ cũng thỏa (1) – (Bạn đọc có thể kiểm tra lại) – Trong đó α, β là hai hằng số.

Do giả thiết và do trên ta có hệ sau đây :

$$\begin{cases} r_1 \alpha + r_2 \beta = u_1 \\ r_1^2 \alpha + r_2^2 \beta = u_2 \end{cases}$$

Hệ này cho phép tính được (α, β) một cách duy nhất. Thật vậy định thức của hệ là :

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} = r_1 r_2 (r_2 - r_1) = -b(r_2 - r_1) \neq 0$$

Như vậy dãy $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ là dãy duy nhất tìm được thỏa vấn đề.

2/ *(2) có nghiệm kép. Khi ấy*

$$r_1 = r_2 = \frac{a}{2} \text{ và } b = -\frac{a^2}{4} \quad (b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0)$$

Ta thử tìm xem tồn tại không một dãy $(r_1^n v_n)$ thỏa (1)

Khi ấy (1) được viết :

$$u_n = a \cdot u_{n-1} - \frac{a^2}{4} \cdot u_{n-2}$$

Hay là :

$$r_1^n v_n = ar_1^{n-1} \cdot v_{n-1} - \frac{a^2}{4} r_1^{n-1} v_{n-2} \iff v_n = 2v_{n-1} - v_{n-2}$$

$$\iff v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2}$$

Điều này cho thấy (v_n) là một cấp số cộng nên :

$$v_n = \alpha + \beta \cdot n$$

Như vậy dãy $((\alpha + \beta n) \cdot r_1^n)$ là dãy duy nhất thỏa đề bài với α, β tính bởi :

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) \cdot r_1 = u_1 \\ (\alpha + 2\beta) \cdot r_1^2 = u_2 \end{cases}$$

Định thức của hệ :

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_1 \\ r_1^2 & 2r_1^2 \end{vmatrix} = r_1^3 \neq 0$$

B BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Bài 1 Cho dãy (u_n) định bởi u_1, u_2 và :

$$u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \ (n \geq 3)$$

Tính u_n khi biết :

1/ $u_1 = 2$; $u_2 = 3$

2/ $u_1 = 0$; $u_2 = 1$

Giải

Phương pháp giải

Lập phương trình đặc trưng

Nếu phương trình có hai nghiệm phân biệt r_1, r_2 thì dãy cần tìm (duy nhất) có dạng $\quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$

Nếu phương trình có nghiệm kép r thì dãy cần tìm (duy nhất) có dạng $\quad u_n = (\alpha + \beta n) r^n$

- Phương trình đặt trưng :

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1 \ ; \ r_2 = 2$$

Do đó : $\quad u_n = \alpha + \beta \cdot 2^n$

- Định α, β nhờ u_1 và u_2

1/ $u_1 = 2$; $u_2 = 3$. Ta có : $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 \\ \alpha + 4\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy : $u_n = 1 + \frac{1}{2} . 2^n = 1 + 2^{n-1}$

2/ $u_1 = 0$; $u_2 = 1$ Ta có :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy : $u_n = -1 + (\frac{1}{2}) . 2^n = -1 + 2^{n-1}$

Bài 2 : Cho dãy (u_n) định u_1 , u_2 và $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ ($n \geq 3$)

Tính u_n khi biết :

1/ $u_1 = 1$; $u_2 = 2$

2/ $u_1 = 0$; $u_2 = -1$

Giải

- Phương trình đặc trưng :

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \text{ (nghiệm kép)}$$

Do đó : $u_n = (\alpha + \beta n) . 2^n$

- Định α , β nhờ u_1 và u_2

1/ $u_1 = 1$; $u_2 = 2$. Ta có :

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) . 2 = 1 \\ (\alpha + 2\beta) . 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha + 2\beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Vậy : $u_n = \frac{1}{2} . 2^n = 2^{n-1}$

Bài 3 : Dãy FIBONACCI

Đó *là* dãy (u_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \ ; \ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \ (n \geq 3) \end{cases}$$

1/ Tính u_n theo n

2/ Chứng minh một số tính chất sau đây của dãy Fibonacci :

1/ $u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2} - 1$

2/ $u_1 + u_3 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}$

3/ $u_2 + u_4 + ... + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$

4/ $u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$

Giải

1/ *Tính u_n theo n*

Phương trình đặc trưng

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ ; \ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Do đó : $u_n = \alpha \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Định α , β bởi điều kiện đầu :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ \alpha \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{5})\,\alpha + (1+\sqrt{5})\,\beta = 2 \\ (3-\sqrt{5})\,\alpha + (3+\sqrt{5}\,\beta = 2 \end{cases}$$

* FIBONACCI - Tức là Leonard de Pise (1180-1250) nhà Toán học người Ý; hoạt động ở nhiều lãnh vực : số học, hình học,...

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{và} \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy}: u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right];\ \forall n \geq 1$$

2/ Một số tính chất của dãy Fibonacci

1/ $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$

Do cách xác định dãy số, ta có :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_1 + u_2 &= u_3 \\ u_2 + u_3 &= u_4 \\ &\ldots\ldots \\ u_n + u_{n+1} &= u_{n+2} \end{aligned}$$

Cộng tất cả các đẳng thức và đơn giản những số hạng giống nhau ở hai vế, ta được :

$$u_1 + (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = u_{n+2} \Rightarrow u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$$

2/ $u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$

Vẫn do cách xác định dãy số, ta có :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_2 + u_3 &= u_4 \\ u_4 + u_5 &= u_6 \\ &\ldots\ldots \\ u_{2n-2} + u_{2n-1} &= u_{2n} \end{aligned}$$

Cộng tất cả các đẳng thức và đơn giản, ta có :

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$$

3/ $u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$

Ta cũng có thể làm như hai câu trên hoặc dùng kết quả hai câu trên :

$$\begin{aligned} u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} &= (u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) - (u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1}) \\ &= (u_{2n+2} - 1) - (u_{2n}) \\ &= (u_{2n+1} + u_{2n}) - 1 - u_{2n} \text{ (do định nghĩa)} \end{aligned}$$

$= u_{2n+1} - 1$

4/ $$u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$$

Với $2 \le k \le n$ ta có :

$$u_k \cdot u_{k+1} = u_k(u_{k-1} + u_k) = u_k \cdot u_{k-1} + u_k^2$$

Vì vậy :

$$u_1u_2 = u_1^2$$
$$u_2u_3 = u_1u_2 + u_2^2$$
$$u_3u_4 = u_2u_3 + u_3^2$$

....

$$u_n \cdot u_{n+1} = u_{n-1} \cdot u_n + u_n^2$$

Cộng tất cả các đẳng thức và đơn giản, ta được :

$$u_n \cdot u_{n+1} = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2$$

C BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho dãy số (u_n) định bởi u_1, u_2 và :

$$u_n = \frac{1}{5}(2u_{n-1} + 3u_{n-2}) \ (n \ge 3)$$

Hãy tính u_n theo n khi biết :

1/ $u_1 = 0$; $u_2 = 1$

2/ $u_1 = 1$; $u_2 = 1$

Trong mỗi trường hợp hãy tính $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Đáp số : 1/ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{8}$; 2/ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{21}{8}$

2. a, b là hai số cho sẵn. Lập dãy (u_n) định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = a \ ; \ u_2 = b \\ u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2}) \ (n \ge 3) \end{cases}$$

Tính u_n theo n và tính $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Đáp số . $u_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2}{3}(a-b) . (-\frac{1}{2})^n$

. $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{a+2b}{3}$

3. a, b là hai số dương cho sẵn. lập dãy (u_n) định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = a \ ; \ u_2 = b \\ u_n = \sqrt{u_{n-1} . u_{n-2}} \end{cases}$$

Tính u_n theo n và tính $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Hướng dẫn : Chuyển sang logarit rồi làm như bài số 2.

**

§6 BÀI TẬP TỔNG HỢP

A BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Bài 1 : Cho dãy (u_n) định bởi :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.(k+1)\dots(k+p)} \quad (n \geq 1)$$

Trong đó p *l*à một số tự nhiên khác 0 cho sẵn

Chứng minh :

$$u_n = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right]$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Giải

Ta chứng minh hệ thức :

$$u_n = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!}\right) \qquad (1)$$

bằng phương pháp qui nạp :

Với n = 1. Ta có :

$$u_1 = \frac{1}{1.2.3\dots(1+p)} = \frac{1}{(p+1)!}$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{p}{(p+1)!} = \frac{1}{p}\cdot\left[\frac{(p+1)-1}{(p+1)!}\right]$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{1}{p!} - \frac{1!}{(1+p)!}\right) : \text{(1) đúng với } n = 1$$

Giả sử (1) đúng với n > 1, ta chứng minh (1) đúng với n + 1. Thật vậy, ta có :

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k.(k+1)\ldots(k+p)}$$

$$= u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}$$

$$= u_n + \frac{n!}{(n+p+1)!} = \frac{1}{pp!} - \frac{n!}{p(n+p)!} + \frac{n!}{(n+p+1)!}$$

$$= \frac{1}{p.p!} \cdot \frac{n!}{(n+p)!}.\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{n+p+1}\right]$$

$$= \frac{1}{p.p!} - \frac{n!(n+1)}{p.(n+p)!(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \left[\frac{1}{p!} - \frac{(n+1)!}{(n+p+1)!}\right]$$: công thức (1) đúng với n + 1

Vậy (1) đã được chứng minh đúng với mọi $n \in N^*$

Để tính giới hạn của u_n ta chú ý rằng :

$$\frac{n!}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}$$

tiến tới 0 khi n tiến tới $+\infty$

Vậy : $$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{p.p!}$$

Bài 2 : a > b là hai số dương cho sẵn. Ta định 2 dãy số (u_n) và (v_n) như sau :

$$\begin{cases} u_1 = a \ ; v_1 = b \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} & (1) \\ v_n = \sqrt{u_{n-1}\, v_{n-1}} & (2) \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng hai dãy số có chiều biến thiên ngược nhau và hội tụ đến cùng một giới hạn. (Không yêu cầu tính giới hạn đó).

Giải

Hiển nhiên *l*à $u_n > 0$, $v_n > 0$, $\forall n \geq 1$ (có thể thấy bằng qui nạp)

Do bất đẳng thức cô si ta có : $v_n \leq u_n$; $\forall\ n \geq 2$

Ta có : $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$$

Vậy dãy (u_n) giảm . Mặt khác :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{u_n.v_n}}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \geq 1$$

Vậy dãy (v_n) tăng. Như thế hai dãy (u_n) và (v_n) có chiều biến thiên ngược nhau.

Ta có thể hình dung :

$$v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq \ldots \leq v_n \leq u_n \leq u_{n-1} \leq \ldots \leq u_2 \leq u_1$$

Cả hai dãy đều bị chặn trong [a, b] nên hội tụ.

Đặt $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$; $l' = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Áp dụng định *lý* giới hạn vào giả thiết (1) ta có :

$$l = \frac{l + l'}{2} \Leftrightarrow l = l'$$

Vậy hai dãy cùng hội tụ đến một giới hạn

GHI CHÚ :

(i) Giới hạn chung này được gọi *l*à trung bình Gauss của hai số dương a và b.

(ii). Chỉ khi nào chứng minh xong sự hội tụ của hai dãy ta mới được dùng định *lý* giới hạn.

Bài 3 : a, b là hai số thực cho sẵn. Ta định hai dãy (u_n và (v_n) như sau :

$$\begin{cases} u_1 = a\ ;\ v_1 = b \\ u_n = \frac{1}{3}(2u_{n-1} + v_{n-1}) \\ v_n = \frac{1}{3}(u_{n-1} + 2v_{n-1})\ (n \geq 2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng hai dãy số ấy hội tụ đến cùng một giới hạn -

Giải

Trước hết ta có, do cách xác định hai dãy (u_n) và (v_n) :

$$u_n - v_n = \frac{1}{3}(u_{n-1} - v_{n-1}) \quad (n \geq 2)$$

$$u_{n-1} - v_{n-1} = \frac{1}{3}(u_{n-2} - v_{n-2})$$

....

$$u_2 - v_2 = \frac{1}{3}(u_1 - v_1) = \frac{1}{3}(a - b)$$

Từ đó ta suy ra :

$$u_n - v_n = \frac{1}{3^{n-1}}.(a - b) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty}(u_n - v_n) = 0$$

cho nên, nếu hai dãy hội tụ, thì chúng sẽ hội tụ đến cùng một giới hạn.

Bây giờ ta ta chứng minh hai dãy hội tụ.

- Nếu a = b thì bằng qui nạp ta chứng minh được :

$$u_n = v_n = a\ ;\ \forall n \geqslant 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n$$

- Giả sử a < b . Từ giả thiết ta có thể viết :

$$3u_n = 2u_{n-1} + v_{n-1} \Leftrightarrow 3u_n - 3u_{n-1} = v_{n-1} - u_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow u_n - u_{n-1} = \frac{1}{3}(v_{n-1} - u_{n-1})$$

Cứ thế cho n các giá trị nhỏ dần ta suy ra :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}(v_1 - u_1) = \frac{1}{3^{n-1}}(b - a) > 0$$

Vậy (u_n) là dãy tăng

Bằng cách làm như trên ta cũng được :

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}(a - b) < 0$$

Vậy (v_n) là dãy giảm

Mặt khác với mọi $n \geq 2$

$$\begin{cases} u_n - v_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}(a - b) \\ a < b \end{cases} \Rightarrow u_n < v_n$$

Như vậy ta có :

$$a = u_1 < u_2 < \ldots < u_n < v_n < v_{n-1} < \ldots < v_2 < v_1 = b$$

Điều này chứng tỏ rằng cả hai dãy đều bị chặn.

Kết luận (u_n) và (v_n) là hai dãy hội tụ đến cùng một giới hạn.

Bài 4 : 1/ (u_n) là một dãy số dương

. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

. Tìm một phản thí dụ cho thấy đảo lại là không đúng.

2/ Áp dụng : Tính :

a/ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n}$ (n ≥1)

b/ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sqrt[n]{n.(n+1)\ldots(n+n)}$ (n ≥ 1)

Giải

1/ . Có hai trường hợp, nên xét riêng :

1) $l > 0$ cố định ε sao cho $\varepsilon < l$. Theo giả thiết :

$$\exists n_o \in N^* : n \geq n_o \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon$$

Do $u_n > 0$; $\forall n \in N^*$ nên ta có :

$$n \geq n_o \Rightarrow (l - \varepsilon)\, u_n < u_{n+1} < (l + \varepsilon) .\, u_n$$

Từ đó ta suy ra :

$$\left.\begin{array}{l} (l-\varepsilon) .\, u_{n-1} < u_n < (l+\varepsilon) .\, u_{n-1} \\ (l-\varepsilon) .\, u_{n-2} < u_n < (l+\varepsilon) .\, u_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ (l-\varepsilon) .\, u_{n_o} < u_{n_o+1} < (l+\varepsilon)\, u_{n_o} \end{array}\right\} \text{(có } n - n_o - 1 \text{ hàng)}$$

Tất cả các vế đều dương nên có thể suy ra :

$$u_{n_o} .\, (l-\varepsilon)^{n-n_o-1} < u_n < u_{n_o} (l+\varepsilon)^{n-n_o-1}$$

Hay là :

$$\sqrt[n]{u_{n_o}} .\, (l-\varepsilon)^{\frac{n-n_o-1}{n}} < \sqrt[n]{u_n} < \sqrt[n]{u_{n_o}} .\, (l+\varepsilon)^{\frac{n-n_o-1}{n}}$$

Khi $n \to +\infty$ thì :

$$\sqrt[n]{u_{n_o}} \longrightarrow 1 \qquad \text{(xem bài 2, §3)}$$

$$(l-\varepsilon)^{\frac{(n-n_o-1)}{n}} \to l - \varepsilon$$

$$(l+\varepsilon)^{\frac{(n-n_o-1)}{n}} \longrightarrow l + \varepsilon$$

Cho nên :

$$\exists n_1 \in N^* : n \geq n_1 \Rightarrow l - 2\varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + 2\varepsilon$$

Điều này chứng tỏ : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

2) $l = 0$

Vẫn $\varepsilon > 0$ cho sẵn, tồn tại $n_o \in N^*$ sao cho :

$$n \geq n_o \Rightarrow 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < u_n \, . \, \varepsilon$$

Dùng cách *l*ặp *l*ại nhiều *l*ần như trên ta được :

$$0 < u_n < u_{n_o} \, . \, \varepsilon^{n-n_o-1}$$

Suy ra :

$$0 < \sqrt[n]{u_n} < \sqrt[n]{u_{n_o}} \, . \, \varepsilon^{\frac{n-n_o-1}{n}}$$

Khi n $\to +\infty$ thì .

$$\sqrt[n]{u_{n_o}} \to 1$$

$$\varepsilon^{\frac{n-n_o-1}{n}} \longrightarrow \varepsilon$$

Cho nên :

$$\exists n_1 \in N^* : n \geq n_1 \Rightarrow 0 < u_n < 2\varepsilon$$

Vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$

Tóm lại trong cả hai trường hợp ta đều có. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Đảo lại khi có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ chưa chắc đã có $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

Thật vậy ta chọn dãy (u_n) định như sau :

$$\begin{cases} u_2 = u_4 = \ldots = u_{2n} = a \\ u_1 = u_3 = \ldots = u_{2n+1} = b \ (a > 0 \ ; \ b > 0 \text{ và } a \neq b) \end{cases}$$

Ta có : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{u_{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{a} = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{b} = 1$$

Tức là : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$

- Trong khi đó :

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{b}{a} \text{ và } \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \frac{a}{b}$$

Mà $\frac{b}{a}$ và $\frac{a}{b}$ là những hằng số khác nhau nên ta có thể nói ($\frac{u_{n+1}}{u_n}$) không có giới hạn.

2/ Áp dụng

a/ Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n}$

Đặt $u_n = C_{2n}^n$. Ta có :

$$u_n = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$u_{n+1} = C_{2(n+1)}^{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}$$

Do đó nên :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 4$$

Hiển nhiên $u_n > 0$; $\forall n \in N^*$ cho nên áp dụng câu 1/ ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n} = 4$$

b/ Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)\ldots(n+n)}$

Đặt : $u_n = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+n)}{n^n}$

Ta có :

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+1+n+1)}{(n+1)^{n+1}}$$

Do đó : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)(n+2)....(n+1+n+1)}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n(n+1)...(n+n)}{n^n}}$

$$= \frac{n^n}{n.(n+1)^{n+1}} . (2n + 1) . (2n + 2)$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n . \frac{(2n+1).(2n+2)}{n.(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} . \frac{(2n+1).(2n+2)}{n.(n+1)}$$

Khi n —> + ∞ thì $(1 + \frac{1}{n})^n \to$ e cho nên :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} . 4 = \frac{4}{e}$$

Áp dụng câu 1/ ta suy ra :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} . \sqrt[n]{n(n+1)\dots(n+n)} = \frac{4}{e}$$

GHI CHÚ : Câu này có thể dùng định nghĩa của tích phân xác định để giải.Lời giải vắn tắt như sau :

$$u_n = \frac{1}{n} . \sqrt[n]{n(n+1)\dots(n+n)} = \sqrt[n]{\frac{n(n+1)\dots(n+n)}{n^n}}$$

Lấy *l*ogarit Néper hai vế :

$$\ln u_n = ln \sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n} (1+\frac{p}{n})}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \ln(1+\frac{p}{n})$$

Vế phải *l*à tổng tích phân của hàm số $f(x) = \ln x$ trên đoạn [1, 2] ứng với phép phân hoạch đều và phép chọn $\xi_i = x_i = 1 + \frac{i}{n}$.

Suy ra :

$$\lim_{n\to\infty} \ln u_n = \int_1^2 \ln x \, . dx$$

$$= [x\ln x - n]_1^2$$

$$= (2\ln 2 - 2) - (1\ln 1 - 1)$$

$$= \ln 4 - 1 = \ln \frac{4}{e}$$

Từ đó suy ra : $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{4}{e}$

(Bài giải vắn tắt này đòi hỏi người đọc phải biết tích phân xác định và nhiều kiến thức khác có *l*iên quan nên người viết nêu ra cho một số bạn đọc có trình độ, để tham khảo).

Bài 5 :

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số :

$$\Phi(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

2/ Chứng tỏ $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2}$; $\forall x > 0$

3/ Xem dãy số $u_n = \Phi(u_{n-1})$ với $n \geq 1$ và $u_0 = \alpha$

Chứng tỏ rằng (u_n) *l*à dãy hội tụ và tính giới hạn của nó.

Giải

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Miền xác định : D = R

Đạo hàm : $y' = \Phi'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} < 0$; $\forall x \in R$

Hàm số *l*uôn giảm, không có cực trị

Tiệm cận :

- Hiển nhiên là : $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0$

Cho nên bên phía x > 0 đồ thị có tiệm cận ngang *l*à trục hoành.

- Mặt khác ta viết :

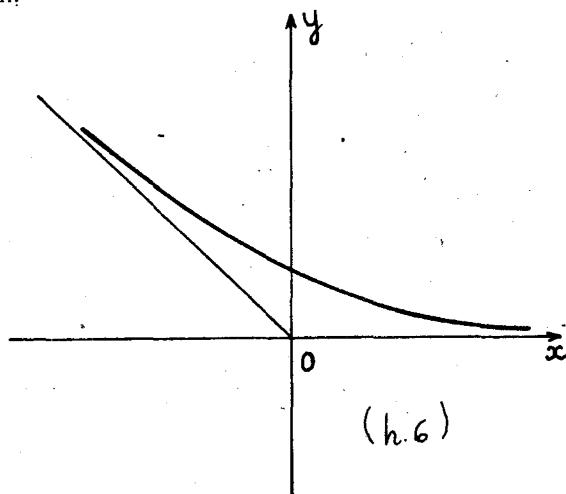
$$\Phi(x) = ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = -x + ln(e^x + 1)$$

Do $\lim_{n \to -\infty} \ln(e^x + 1) = 0$ nên phía bên x < 0 đồ thị có tiệm cận xiên *l*à đường thẳng y = –x

. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	–	$+\infty$
$\Phi'(x)$			
$\Phi(x)$	$+\infty$	↘	0

. Đồ thị



(h.6)

2/ Chứng minh : $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2}$; $\forall x \geq 0$

Ta có : $\Phi'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$ => $|\Phi'(x)| = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{1}{e^{x}+1}$

Do $x \geq 0$ nên $e^x \geq 1$, do đó : $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{2}$; $\forall x \geq 0$

3/ Khảo sát dãy $u_n = \Phi(u_{n-1})$

Nếu dãy (u_n) hội tụ thì phải hội tụ đến l, nghiệm của phương trình :

$$\Phi(x) = x$$

Tức là : $ln(1 + e^{-x}) = x \iff -x + ln(e^x + 1) = x$

$$\iff ln(e^x + 1) = 2x$$
$$\iff e^x + 1 = e^{2x}$$
$$\iff (e^x)^2 - e^x - 1 = 0$$

Do $l > 0$ nên : $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Mặt khác, áp dụng định lý lagrange trên [a, b] với $0 < a < b$

Ta có :

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(c) \cdot (b - a) \text{ với } c \in (a, b)$$

Cho nên : $|\Phi(b) - \Phi(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$

Suy ra : $|u_n - \Phi(l)| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - l|$

hay là (do $l = \Phi(l)$) : $|u_n - l| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - l|$ (n = 1, 2, ... , n)

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức này rồi nhân tất cả vế lại ta được :

$$|u_n - l| \leq \frac{1}{2^n}|u_o - l| = \frac{1}{2^n}|\alpha - l|$$

Kết quả : (u_n) *l*à dãy hội tụ và : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ. (Tổng hợp – Ôn)

1. 1/ Chứng minh :

$$a - \frac{a^2}{2} < ln(1 + a) < a ; \quad \forall a > 0$$

2/ Xem dãy (u_n) định bởi :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức ở câu 1/ để chứng minh rằng (u_n) *l*à dãy hội tụ mà ta sẽ phải tính giới hạn của nó.

Hướng dẫn

1. Dùng sự biến thiên của hàm số :

$$\varphi(a) = a - ln(1 + a)$$

$$\psi(a) = ln(1 + a) + \frac{a^2}{2} - a$$

2. Coi hai dãy (u_n) và (v_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1, v_1 \text{ (hai số dương cho sẵn)} \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \\ \dfrac{2}{v_n} = \dfrac{1}{u_{n-1}} + \dfrac{1}{v_{n-1}} \end{cases}$$

Chứng minh hai dãy cùng hội tụ đến một giới hạn. Tính giới hạn ấy.

Hướng dẫn

Bằng qui nạp chứng minh được (u_n) *l*à dãy giảm và (v_n) *l*à dãy tăng.

Hãy chứng minh : $u_n - v_n \le \dfrac{1}{2}(u_{n-1} - v_{n-1})$

Từ đó kết *l*uận ?

Để tìm giới hạn chung hãy *lưu* ý :

$$u_n v_n = u_{n-1} \cdot v_{n-1} \text{ và } v_n \leq \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} \leq u_n$$

3. Coi hai dãy (u_n) và (v_n) định bởi :

$$\begin{cases} u_1 > 1 \;;\; v_1 > 1 \text{ (cho sẵn)} \\ u_1 \leq v_1 \\ u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \sqrt{v_{n-1}}\right) \\ u_n = \dfrac{1}{2}\left(v_{n-1} + \sqrt{u_{n-1}}\right) \end{cases}$$

Chứng minh hai dãy cùng hội tụ đến một giới hạn. Tính giới hạn ấy.

Đáp số : $l = 1$

4. (u_n) và (v_n) *l*à hai dãy hội tụ. Ta đặt :

$$M_n = \max(u_n, v_n)$$

$$m_n = \min(u_n, v_n)$$

Chứng tỏ rằng (M_n) và (m_n) *l*à hai dãy hội tụ và tính giới của chúng.

Hướng dẫn : Chứng minh : $\max(a, b) = \dfrac{1}{2}(|a - b| + a + b)$

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(-|a - b| + a + b)$$

Với mọi số thực a, b rồi áp dụng giải quyết bài toán

5. Coi hai dãy (u_n) và (v_n) định bởi.

$$u_n = \sin n\alpha \;;\; (\alpha \neq k\pi \text{ cho sẵn} \;;\; k \in Z)$$

$$u_n = \cos n\alpha$$

1/ Chứng tỏ rằng nếu một trong hai dãy hội tụ thì dãy còn *l*ại cũng hội tụ.

2/ Dùng định *l*ý giới hạn và vài công thức *l*ượng giác cơ bản chứng tỏ rằng sự hội tụ nói trên sẽ dẫn tới điều vô *l*ý. Từ đó kết *l*uận?

6. Coi hai dãy (u_n) định bởi :

$$u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}\ (n \geq 1)$$

n căn số chồng chất

1/ Chứng minh (u_n) *l*à dãy tăng

2/ Đặt : $v_n = \sqrt{2^{2^0} + \sqrt{2^{2^1} + \sqrt{2^{2^2} + \ldots + \sqrt{2^{2^{n-1}}}}}}\ (n \geq 1)$

. Chứng minh : $n \geq 2^{n-1}$ với mọi $n \geq 1$

. Chứng minh : $u_n \leq v_n$

. Đặt : $w_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}$

n căn số chồng chất

Chứng minh : $v_n = \sqrt{2}\,.\,w_n$

Chứng minh các dãy (v_n) và (w_n) hội tụ, suy ra (u_n) hội tụ.

7. 1/ Chứng minh rằng phương trình tgx = x có một nghiệm duy nhất u_n trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ với $n \in N$

2/ Khảo sát dãy (v_n) định bởi :

$$v_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - u_n\ ;\ (n \in N)$$

3/ Từ đó suy ra có thể khai triển u_n như sau :

$$u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\,.\,\varepsilon_n$$

Với $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$

Hướng dẫn

1/ Xét hàm f(x) = tgx - x trên $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

2/ . Chứng tỏ $v_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $\forall\ n \in N$

. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

3/ Do $v_n \approx \frac{1}{n\pi}$ nên $v_n = \frac{1}{n\pi}(1 + \varepsilon_n)$

....

8. 1/ Chứng minh : $\frac{1}{1+x} < ln\,(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$; $\forall \ x > 0$

2/ Chứng minh : $\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} < ln\,n < \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$; ($n \geq 2$ và $n \in N$)

3/ Đặt : $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - ln\,n$. Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ

(Ghi chú : Giới hạn của nó được đặt tên là hằng số Euler)

9. Đặt : $u = 1 + \sqrt{2}$; $v = 1 - \sqrt{2}$

1/ Chứng minh rằng ta có thể viết :

$$u^n = a_n + b_n\sqrt{2} \text{ và } v^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

Trong đó a_n và b_n là hai số nguyên dương tiến ra $+\infty$ khi n tiến ra $+\infty$. Suy ra rằng :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2} \quad \text{và} \quad \lim_{n\to+\infty} (u^n - 2a_n) = 0$$

2/ Chứng tỏ $a_n^2 - 2b_n^2$ cố định, suy ra a_n và b_n nguyên tố cùng nhau.

3/ Tính : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$; $\frac{b_{n+1}}{b_n}$

4/ Tính các tổng sau đây theo n :

$$s'_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{và } s''_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

và tìm giới hạn : $\lim_{n\to\infty} \frac{s'_n}{s''_n}$

5/ Chứng minh rằng tồn tại hai số thực cố định α và β sao cho :

$$\begin{cases} a_{n+2} = \alpha . a_{n+1} + \beta . a_n \\ b_{n+2} = \alpha . b_{n+1} + \beta . b_n \end{cases}$$

Tính nghiệm của phương trình $x^2 = \alpha x + \beta$ và giải thích kết quả thu được.